Exercices 1 — algèbre et fonctions

Calcul différentiel – Hiver 2018 – Yannick Delbecque

Notation, logique, nombres

Question 1
Donner la contraposée des énoncés suivants.

a) « si $x \in \mathbb{Z}$, alors $x \in \mathbb{Q}$ »
b) « Si une fonction f est continue en $x = a$, alors $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. »
c) « Quand la fenêtre est ouverte, la pluie entre dans le salon. »
d) « Si X est humain, alors X est mortel. »
e) « Tous les fruits sont des légumes. »
f) « Si $n \in \mathbb{N}$ est pair, alors $n+1$ est impair. »

Question 2
Mettre les nombres périodiques $0.\overline{123}$ et $2.\overline{18}$ sous forme de fractions.

Question 3 (Défi difficile)
Démontrer que $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre rationnel en utilisant le lemme suivant (qu'il n'est pas nécessaire de prouver) :

n est un multiple de 3 ssi n^2 est un multiple de trois.

Indice : s'inspirer de la preuve vue en classe pour $\sqrt{2}$.

Question 4 (Défi difficile)
Démontrer que $\log_2 3$ n'est pas un nombre rationnel en utilisant le fait que la décomposition en facteurs premiers est unique. Indice : s'inspirer (un peu moins) de la preuve vue en classe pour $\sqrt{2}$.

Question 5
Effectuer les opérations suivantes.

a) $\{1,\pi,2\pi\}\cup\{1,2,3,4\}$
b) $\{1,\pi,2\pi,3\}\cap\{1,2,3,4\}$
c) $\{1,\pi,45\}\setminus\{1,2,3,4\}$
d) $[2,5]\cup]4,8]$
e) $[2,5]\cap]4,8]$
f) $[2,5]\setminus]4,8]$
g) $\mathbb{N}\cap[0.5,\pi]$
h) $\mathbb{Q}\cap\{0.5,\pi,3.14159,\mathrm{e},\sqrt{2},3/5\}$
i) $\{0.5,\pi,3.14159,\mathrm{e},\sqrt{2},3/5\}\setminus Q$

Question 6
Décrire les ensembles suivants à l'aide d'intervalles

a) $\{x \mid x \geq -3 \text{ et } x < \pi\}$
b) $\{x \mid x-2 < 5\}$
c) $\{x \mid x < 3 \text{ et } 0 < x \text{ et } x \leq 1/2\}$
d) $\{x \mid x^2 < 4\}$

Exposants et logarithmes

Question 7
Mettre les expressions suivantes sous la forme

$$C(x-a)^b$$

où a et b et C sont des nombres réels.

a) $\dfrac{1}{x^3}$
b) $\dfrac{2}{x^3}$
c) $\dfrac{2}{3x^5}$
d) $\dfrac{1}{(x-3)^2}$
e) $\dfrac{7}{(x+1)^6}$
f) $\sqrt{x}$
g) $\sqrt[3]{x-2}$
h) $\dfrac{\sqrt[4]{x+2}}{5}$
i) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
j) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$
k) $\dfrac{2}{3\sqrt[5]{x}}$
l) $\sqrt{x^3}$
m) $\sqrt[4]{(x-3)^5}$
n) $\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$
o) $\dfrac{4}{3\sqrt[5]{x^4}}$
p) $(2x-3)^2$
q) $(2x)^3$
r) $(2x-1)^3$
s) $\sqrt{4x-1}$
t) $\dfrac{(x-2)^2}{\sqrt{x-2}}$
u) $\dfrac{3(x+1)}{4\sqrt[3]{x+1}}$
v) $\dfrac{2\sqrt[5]{x+1}}{5\sqrt{x+1}}$

Droites

Question 8
Déterminer la pente et l'ordonnée à l'origine des droites suivantes.

a) La droite d'équation $3x+2y=1$.
b) La droite d'équation $\dfrac{x}{5}+\dfrac{2y}{3}=1$.
c) La droite d'équation $y=-3(x-2)+1$
d) La droite d'équation $\sqrt{2}x+\log_2(3)y=\sqrt{3}$

Question 9
Donner l'équation de la droite...

a) de pente -5 qui passe par le point $(-3,4)$;
b) passant par les points $(-2,4)$ et $(1,-5)$;
c) parallèle à la droite trouvée en a) qui passe par le point $(1,-2)$.

Quadratiques

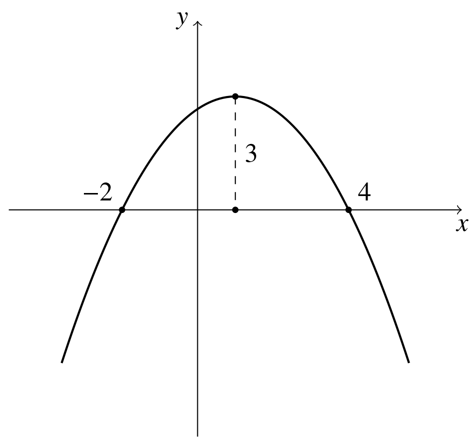
Question 10
Trouver les zéros de chacune des fonctions polynomiales ci-dessous en factorisant.

a) $f(x) = x^2 + 7x + 12$
b) $f(x) = 9 - 4x^2$
c) $f(x) = 3x^2 + 5x$
d) $f(x) = -x^2 - 100$

Question 11
Utiliser la formule quadratique pour trouver les zéros de chacune des fonctions suivantes.

a) $f(x) = -3x^2 + 2x - 6$
b) $f(x) = 6x^2 - 17x + 12$
c) $f(x) = x^2 + 11$
d) $f(x) = 9x^2 - 6x + 1$

Question 12
Déterminer quelle fonction quadratique de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ est illustrée dans le graphe suivant.



Polynômes

Question 13
Factoriser complètement les polynômes suivants.

a) $4x^3 - 3x^2 + 4x - 3$
b) $x^2 + 5x + 6$
c) $9x^2 + 12x + 4$
d) $16x^2 - 81$
e) $x^2 + 25$
f) $3x^3 - 108x$
g) $18x^5 + 32x^3$
h) $x^4 - 5x^2 + 4$

Question 14
Trouver les zéros des fonctions polynomiales suivantes.

a) $f(x) = 4x - 3$
b) $f(x) = 2$
c) $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$
d) $f(x) = (x-1)(x+1)$
e) $f(x) = x(x-1)\left(x + \sqrt{2}\right)$
f) $f(x) = \dfrac{(x-2)(x+1)}{x^2+3}$

Question 15
Effectuer les divisions polynomiales suivantes.

a) $\dfrac{x^2-1}{x-1}$
b) $\dfrac{x^2-1}{x+1}$
c) $\dfrac{x^2+1}{x-1}$
d) $\dfrac{x^3-1}{x-1}$
e) $\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$
f) $\dfrac{x^4-x^3-2x^2+3x-1}{x-1}$
g) $\dfrac{x^5+x^4+2x^3+2x^2+x+2}{x+1}$

Question 16
Le polynôme $P(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 15$ peut également s'écrire de la manière suivante.

$$P(x) = (x-3)\left(x^2 - x + 5\right)$$

a) Peut-on le factoriser davantage ? Expliquer.
b) Vérifier que $x = 3$ est un zéro de $P(x)$ dans les deux formes données dans la question.
c) Trouver, s'il y en a, d'autres valeurs de x pour lesquelles $P(x) = 0$.

Question 17
Soit le polynôme $P(x) = x^4 - 5x^3 - 8x^2 - 24$.

a) Sans effectuer de division, dire si $(x-2)$ est un facteur de $P(x)$.
b) Est-ce que $(x+2)$ divise $P(x)$?

Question 18
Soit le polynôme $P(x) = x^4 + 3x^2 + 2$.

a) Ce polynôme a-t-il des zéros ?
b) Existe-t-il une factorisation pour de $P(x)$?
c) Cela contredit-il le théorème de factorisation ? Expliquer.

Fonctions

Question 19
Substituer (sans simplifier)...

a) y à x dans $x^2 + 3x + 4$
b) $y + 1$ à x dans $x^2 + 3x + 4$
c) $y + h$ à x dans $x^2 + 3x + 4$
d) x^2 à x dans $x^2 + 3x + 4$
e) $x + \delta x$ à x dans $x^2 + 3x + 4$
f) $x + \delta x$ à x dans $\dfrac{1}{x^2+1}$
g) $x + \delta x$ à x dans $\dfrac{1}{(x+1)^2}$

Question 20
Évaluer. . .

a) $f(3)$ si $f(x) = x^3$
b) $f(1)$ si $f(x) = x^{3/2}$
c) $f(9)$ si $f(x) = x^{3/2}$
d) $f\left(\sqrt[3]{2}\right)$ si $f(x) = x^{3/2}$
e) $f(2)$ si $f(x) = 2^{2/3}x^{1/3}$
f) $f(1+h)$ si $f(x) = x^2$
g) $f(3+h)$ si $f(x) = x^3$
h) $f(y)$ si $f(x) = \sqrt{x^2+1}$
i) $f(y+h)$ si $f(x) = \frac{1}{x}$
j) $f(1)$ si $f(x) = x^{5/2}$
k) $f(x+h)$ si $f(x) = x^{5/2}$
l) $f(2)$ si $f(x) = \log(x-1)$
m) $f(0)$ si $f(x) = 2^{(x-1)}$
n) $f(-1)$ si $f(x) = \frac{1}{x+1}$
o) $f(1)$ si $f(x) = 2^{(x-1)}$
p) $f(x+\Delta x)$ si $f(x) = x-1$
q) $f(x+\Delta x)$ si $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - 1$
r) $f(x+\Delta x)$ si $f(x) = (x+1)^2 - x$

Question 21
Considérons les fonctions définie par $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2$ et $h(x) = \frac{1}{x+1}$. Évaluer les expressions suivantes.

a) $3f(x) - 5$
b) $f(3x-5)$
c) $f(x) + h(x)$
d) $f(x)g(x)$
e) $f(g(x))$
f) $g(f(x))$
g) $[f \circ g \circ h](x)$
h) $[h \circ g \circ f](x)$
i) $[g \circ h \circ f](x)$

Question 22
Soit la fonction définie par $f(x) = x^3 - 4x$.

a) Donner l'équation de la droite passant par $(-1, f(-1))$ et $(2, f(2))$
b) Vérifier que le point $(1,-3)$ sont sur le graphe de f
c) Donner l'équation de la droite passant par $(1,-3)$ et $(2, f(2))$

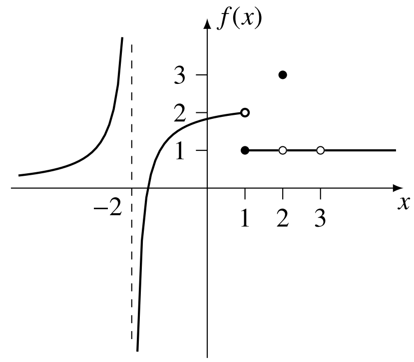
Question 23
Faire une esquisse du graphe des fonctions suivantes.

a) $f(x) = (x-2)^2 + 1$
b) $f(x) = \frac{1}{x+2} - 1$
c) $f(x) = -\left(x+\sqrt{3}\right)^2 + 2\sqrt{2}$
d) $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$

Question 24
Déterminer lesquelles des équations suivantes définissent des fonctions si on considère x comme variable indépendante et y comme variable dépendante. Si l'équation donnée défini une fonction, donner la règle de correspondance et son domaine de définition.

a) $yx = 1$
b) $x + y = 1$
c) $x^2 + y^2 = 1$
d) $x^3 + y^3 = 0$
e) $2^x = y^2$
f) $2^y = x^2$
g) $2x^2 - y + 8 = 3x$
h) $\dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{x^2}$
i) $\sin(y) = x$
j) $\sin(x) = 3y + 2$

Question 25
Soit f la fonction ayant le graphe suivant. Évaluer f pour les valeurs de x données.



a) $x = -2$
b) $x = 1$
c) $x = 3/2$
d) $x = 2$
e) $x = 3$
f) $x = \pi$

Question 26
Soit f la fonction définie de la manière suivante.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < -2 \\ -x & \text{si } -2 \le x \le 1 \\ x^2 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

a) Évaluer $f(-3)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(1/2)$, $f(1)$, $f(2)$.
b) Quel est le domaine de f ?

Question 27
Soit f la fonction définie de la manière suivante.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } x \le 2 \\ x & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

a) Évaluer $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$.
b) Quel est le domaine de f ?

Question 28
La fonction *valeur absolue* est la fonction définie de la manière suivante.

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \le x \end{cases}$$

a) Évaluer $|-3|$, $|0|$, $|2|$.
b) Quel est le domaine de la fonction valeur absolue ?
c) Est-ce que la fonction valeur absolue admet une fonction inverse ?
d) Montrer que $|x| = \sqrt{x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
e) Montrer que $|ab| = |a||b|$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$. (Ind. Utiliser le résultat précédent).

Question 29

La *distance* $d(x_1, x_2)$ entre x_1 et x_1 sur la droite réelle peut être définie par

$$d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|.$$

Utiliser cette idée de distance pour déterminer quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ satisfont les relations suivantes. (ind. faire une esquisse rapide peut aider !)

a) $|x-1| = 1$
b) $|x-2| < 1$
c) $|x+1| \leq 2$
d) $|x| < \sqrt{2}$
e) $|x| > 1$
f) $|x| = \pi$

Question 30

Déterminer si les fonctions f et g suivantes sont des fonctions inverses une de l'autre.

a) $f(x) = 2x - 3$ et $g(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{2}$
b) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ et $g(x) = x^3 - 1$
c) $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x-2}$ et $g(x) = \dfrac{2x+1}{3x-2}$

Question 31

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes.

a) $f(x) = x^{100} + x^{50} + 1$
b) $f(x) = \dfrac{1}{2x-3}$
c) $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)(x+2)}$
d) $f(x) = \dfrac{3x-1}{2x+5}$
e) $f(x) = \dfrac{2}{x^2-16}$
f) $f(x) = \dfrac{3}{(x-4)^2}$
g) $f(x) = \dfrac{2x^2-3x-5}{x^2-x-2}$
h) $f(x) = \sqrt{x-1}$
i) $f(x) = \sqrt{2x-5}$
j) $f(x) = \sqrt{x^3}$
k) $f(x) = \sqrt{(x-1)^3}$
l) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$
m) $f(x) = \sqrt{(x^2+1)}$
n) $f(x) = \dfrac{-x+2}{x^3-x^2+5x}$
o) $f(x) = |x^3-1|$
p) $f(x) = \dfrac{1}{|x-1|}$
q) $f(x) = \dfrac{1}{|x|-1}$
r) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x-5}}$
s) $f(x) = \dfrac{1}{\log(x-4)-1}$
t) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x-x^2}{x^2+x-2}}$

Question 32

Déterminer les points de croisement avec les axes des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \sqrt{x^2-4}$
b) $f(x) = \left(x - 3\sqrt{3}\right)^{2/3}$
c) $f(x) = \sqrt{-x^2+3x+4}$
d) $f(x) = x^4 - 16$
e) $f(x) = x^3 + 27$
f) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}$

Question 33

Quelle est la pente de la droite passant par les points correspondants aux valeurs $x = 2$ et $x = 3$ du graphe de la fonction $f(x) = x^3$?

Solutions

Question 1

a) si $x \notin \mathbb{Q}$, alors $x \notin \mathbb{Z}$
b) Si $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, alors f n'est pas continué en $x = a$.
c) Si la plus n'entre pas dans le salon, alors la fenêtre est fermée.
d) Si X n'est pas mortel, alors X n'est pas humain.
e) Si ce n'est pas un légume, ce n'est pas un fruit.
f) Si $n+1$ est pair, alors n est impair.

Question 2

Soit
$$x = 0.\overline{123}$$
. On multiplie par 1000 pour obtenir
$$1000x = 123.\overline{123}.$$
En soustrayant $1000x - x$, on obtient
$$999x = 123$$
et donc
$$x = \frac{123}{999} = \frac{41}{333}$$
.

Soit
$$y = 2.\overline{18}$$
. On multiplie par 100 pour obtenir
$$100y = 218.\overline{18}.$$
En soustrayant $100y - y$, on obtient
$$99x = 216$$
et donc
$$x = \frac{216}{99} = 2411.$$

Question 3

Si $\sqrt{3}$ est un nombre rationnel, il peut s'écrire sous la forme d'une fraction simplifiée :
$$\sqrt{3} = \frac{m}{n}$$
. En multipliant par n et en prenant le carré, on obtient
$$3n^2 = m^2.$$
m^2 est donc un multiple de trois, et donc m aussi (par le lemme donné). Si $m = 3k$, on a en substituant $3k$ à n dans la dernière équation, on obtient l'égalité
$$3n^2 = 9k^2.$$
En divisant par 3, on obtient
$$n^2 = 3k^2.$$
Cette fois-ci, n^2 est un multiple de 3, et donc n est aussi un multiple de 3.

Question 4

Si $\log_2(3)$ est une faction, on peut l'écrire comme un fraction déjà simplifiée
$$\log_2(3) = \frac{m}{n}.$$
Par définition des logarithmes, cela est équivalant à dire que
$$3 = 2^{m/n}.$$
En prenant la puissance n de chaque membre de l'égalité et en simplifiant les exposants avec les propriétés des exposants, on obtient
$$3^n = 2^m.$$
Comme 2 et 3 sont des nombres premiers et que la décomposition en facteurs premiers est unique, il est impossible qu'une puissance de 2 soit aussi une puissance de 3 (sans quoi on aurait deux décompositions différentes en facteurs premiers pour un même nombre !). L'hypothèse que $\log_2(3)$ est rationnel est donc fausse et
$$\log_2(3) \notin \mathbb{Q}.$$

Question 5

a) $\{1, 2, 3, 4, \pi, 2\pi\}$
b) $\{1, 3\}$
c) $\{\pi, 5\}$
d) $[2, 8]$
e) $]4, 5]$
f) $[2, 4]$
g) $\{1, 2, 3\}$
h) $\{0.5, 3.14159, 3/5\}$
i) $\{\pi, e, \sqrt{2}\}$

Question 6

a) $[-3, \pi[$
b) $]-\infty, 7[$
c) $]0, 1/2[$
d) $]-2, 2[$

Question 7

a) x^{-3}
b) $2x^{-3}$
c) $\frac{2}{3}x^{-5}$
d) $(x-3)^{-2}$
e) $7(x+1)^{-6}$
f) $x^{1/2}$
g) $(x-2)^{1/3}$
h) $\frac{1}{5}(x+2)^{1/4}$
i) $x^{-1/2}$
j) $2x^{-1/3}$
k) $\frac{2}{3}x^{-1/5}$
l) $x^{3/2}$
m) $(x-3)^{5/4}$

n) $x^{-3/2}$
o) $\frac{4}{3}x^{-4/5}$
p) $4(x-3/2)^2$
q) $8x^3$
r) $8(x-1/2)^3$
s) $2(x-1/4)^{-1/2}$
t) $(x-2)^{3/2}$
u) $\frac{3}{4}(x-2)^{2/3}$
v) $\frac{3}{5}(x+1)^{-3/10}$

Question 8

a) Équation de la droite : $y = -3x/2 + 1/2$. Pente=$-3/2$, ordonnée à l'origine = $1/2$
b) Équation de la droite : $y = -\frac{3}{10}x + \frac{3}{2}$. Pente=$-3/10$, ordonnée à l'origine = $3/2$
c) Équation de la droite : $y = -3x + 7$. Pente=-3, ordonnée à l'origine = 7
d) Équation de la droite : $y = -\frac{\sqrt{2}}{\log_2(3)}x + \frac{\sqrt{3}}{\log_2(3)}$. Pente=$-\frac{\sqrt{2}}{\log_2(3)}$, ordonnée à l'origine = $\frac{\sqrt{3}}{\log_2(3)}$

Question 9

a) $y = -5x - 11$
b) $y = -\frac{1}{3}x - \frac{14}{3}$
c) $y = -5x + 3$

Question 10

a) $x = -3$ et $x = -4$
b) $x = -\frac{3}{2}$ et $x = \frac{3}{2}$
c) $x = -\frac{5}{3}$ et $x = 0$
d) La fonction n'a pas de zéro

Question 11

a) La fonction n'a pas de zéro
b) $x = \frac{4}{3}$ et $x = \frac{3}{2}$
c) La fonction n'a pas de zéro
d) $x = \frac{1}{3}$ (zéro double)

Question 12

$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$

Question 13

a) $(4x-3)(x^2+1)$
b) $(x+2)(x+3)$
c) $(3x+2)^2$
d) $(4x-9)(4x+9)$
e) $x^2 + 25$
f) $3x(x-6)(x+6)$
g) $2x^3(9x^2+16)$
h) $(x+2)(x-2)(x+1)(x-1)$

Question 14

a) x=3/4
b) aucun zéro
c) $x = 2$ et $x = 1/2$
d) $x = 1$ et $x = -1$
e) $x = 0$,$x = 1$ et $x = -\sqrt{2}$
f) $x = 2$ et $x = -1$

Question 15

a) $x + 1$
b) $x - 1$
c) $x + 1$ reste 2
d) $x^2 + x + 1$
e) x reste $x - 1$
f) $x^3 - 2x + 1$
g) $x^4 + 2x^2 + 1$ reste 1

Question 16

a) Non, car le facteur $x^2 - x + 5$ n'a pas de zéro : le discriminant $b^2 - 4ac$ de la formule quadratique est négatif, il n'y a donc pas de zéros.
b) Laissé à l'étudiant.
c) Il n'y en a pas d'autres, d'après la factorisation.

Question 17

a) $(x-2)$ n'est pas un facteur de $P(x)$
b) Oui

Question 18

a) Chacun des termes de $x^4 + 3x^2 + 2$ consistent en une puissance paire de x avec un facteur positif, les valeurs prises par $P(x)$ sont donc toujours strictement positives. Elle n'admet donc pas de zéros.
b) Il existe une factorisation : $(x^2+1)(x^2+2)$. On peut la trouver en posant $y = x^2$ et en factorisant $y^2 + 3y + 2$.
c) Chacun des facteurs de ce polynôme est irréductible. $P(x)$ n'a donc pas de facteur du premier degré, donc le théorème n'est pas contredit.

Question 19

a) $y^2 + 3y + 4$
b) $(y+1)^2 + 3(y+1) + 4$
c) $(y+h)^2 + 3(y+h) + 4$
d) $(x^2)^2 + 3(x) + 4$
e) $(x+\Delta x)^2 + 3(x+\Delta x) + 4$
f) $\frac{1}{(x+\Delta x)^2+1}$
g) $\frac{1}{((x+\Delta x)+1)^2}$

Question 20

a) 27
b) 1
c) 27
d) $\sqrt{2}$
e) 2
f) $(1+h)^2 = 1 + 2h + h^2$
g) $(3+h)^3 = 27 + 27h + 9h^2 + h^3$
h) $\sqrt{y^2+1}$
i) $\frac{1}{y+h}$
j) 1
k) $(x+h)^{5/2}$
l) 0
m) 1/2
n) Non défini (division par zéro).
o) 1
p) $(x+\Delta x) - 1$
q) $\frac{1}{(x+\Delta x)^2} - 1$
r) $((x+\Delta x)+1)^2 - (x+\Delta x)$

Question 21

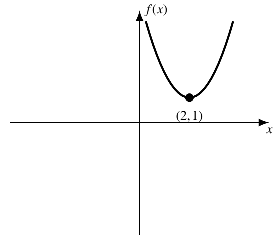
a) $6x - 5$
b) $6x - 10$
c) $2x + \frac{1}{x+1}$
d) $2x^3$
e) $2x^2$
f) $4x^2$
g) $\frac{2}{(x+1)^2}$
h) $\frac{1}{4x^2+1}$
i) $\frac{1}{(2x+1)^2}$

Question 22

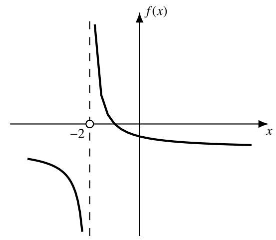
a) $y = -x + 2$
b) $f(1) = 1^3 - 4(1) = -3$
c) y=-3x-6

Question 23

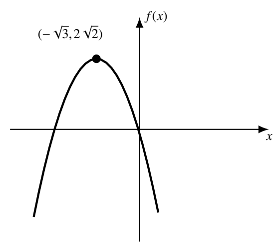
a)



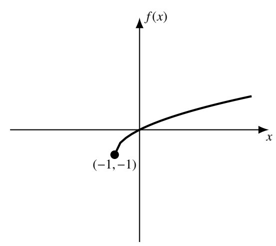
b)



c)



d)



Question 24

a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.
b) $f(x) = 1 - x$, $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$
c) pas une fonction !
d) $f(x) = -x$, $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$
e) Pas une fonction.
f) $f(x) = \log_2(x^2)$, $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.
g) $f(x) = 2x^2 - 3x + 8$, $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$.
h) $f(x) = x^2$, $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$
i) Pas une fonction.
j) $f(x) = \frac{\sin(x)-2}{3}$, $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$.

Question 25

a) $f(-1)$ n'est pas défini
b) $f(1) = 1$
c) $f(3/2) = 1$
d) $f(2) = 3$
e) $f(3)$ n'est pas défini
f) $f(\pi) = 1$

Question 26

a) $f(-3) = 9$, $f(-2) = 2$, $f(0) = 0$, $f(1/2) = -1/2$, $f(1) = -1$, $f(2) = 4$.
b) $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$

Question 27

a) $f(-1) = -1/2$, $f(0) = -1$, $f(1)$ n'est pas défini, $f(2) = 1$.
b) $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

Question 28

a) $f(-3) = 3$, $f(0) = 0$, $f(2) = 2$
b) $\mathbb{R}$
c) Non, car pour une valeur y donnée de l'image il existe généralement 2 valeur x du domaine tels que $|x| = y$.
d) Si $x \geq 0$, $|x| = x$ et $\sqrt{x^2} = x$, on a donc l'égalité. Si $x < 0$, alors $|x| = -x$ et $\sqrt{x^2} = -x$. On a donc Dans tout les cas on $\sqrt{x^2} = |x|$, QED.
e) $|ab| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2b^2} = \sqrt{a^2}\sqrt{b^2} = |a||b|$, QED.

Question 29

a) $\{2, 0\}$
b) $]1, 3[$
c) $[-3, 1]$
d) $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$
e) $]-\infty, -1[\cup]1, \infty[$
f) $\{-\pi, \pi\}$

Question 30

a) $f(g(x)) = 2\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{2}\right) - 3 = x$ et $g(f(x)) = \frac{2x-3}{2} + \frac{3}{2} = x$, donc f et g sont des fonctions inverses.
b) f et g sont des fonctions inverses
c) f et g sont des fonctions inverses

Question 31

a) $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$
b) $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\{3/2\}$
c) $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\{3, -2\}$
d) $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\{-5/2\}$
e) $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\{-4, 4\}$
f) $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\{4\}$
g) $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\{2, -1\}$
h) $\mathrm{dom}(f) = [1, \infty[$
i) $\mathrm{dom}(f) = [5/2, \infty[$
j) $\mathrm{dom}(f) = [0, \infty[$
k) $\mathrm{dom}(f) = [1, \infty[$
l) $\mathrm{dom}(f) =]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$
m) $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$
n) $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$
o) $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$
p) $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\{1\}$
q) $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$
r) $\mathrm{dom}(f) =]-\infty, -1[\cup]5, \infty[$
s) $\mathrm{dom}(f) =]4, \infty[$
t) $\mathrm{dom}(f) = [-2, 0]\cup[1, 2]$

Question 32

a) Ne croise pas l'axe des y, $x = \pm 2$
b) $y = 3$, $x = 3\sqrt{3}$
c) $y = 2$, $x = -1$ ou 4
d) $y = -16$, $x = -2$ ou 2
e) $y = 27$, $x = -3$
f) Ne croise pas l'axe des y, $x = -1/2$

Question 33

$\frac{3^3 - 2^3}{3-2} = 27 - 8 = 19$