Yannick Delbecque — Département de mathématiques, Cégep St-Laurent
Mathématiques générales 2 — 201-735 — Hiver 2018

Formatif 1

Répondre sur vos propres feuilles. L'usage de la calculatrice est interdit. Aucune documentation est permise. Une réponse sans justification, même exacte, vaut au plus 50% des points.

Question 1 (10 points)
Répondre aux questions suivantes. Il n'est pas nécessaire de justifier vos réponses.

a) Vrai ou faux ? Si en évaluant une limite on obtient la forme indéterminée « 0/0 », la limite n'existe pas.

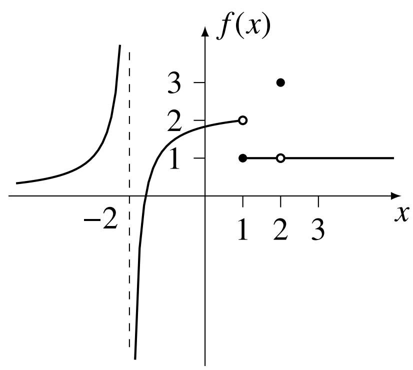
b) Vrai ou faux ? La fonction $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-2}$ est continue pour toute valeur de $x \in \mathbb{R}$.

c) Donner un exemple de graphe de fonction où $\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$, mais où $\lim_{x\to 2} f(x) \exists$ et $2 \in \mathrm{dom}(f)$.

d) Donner un exemple de graphe de fonction où $\lim_{x\to 2} f(x) \nexists$ mais où $f(2)$ est défini.

e) Donner un exemple de graphe de fonction qui a une discontinuité « réparable » en $x = 2$.

Question 2 (20 points)
Évaluer, s'ils existent, les nombres suivants en se basant sur le graphique de la fonction f.



a) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

b) $\lim_{x\to (-2)^+} f(x)$

c) $\lim_{x\to -2} f(x)$

d) $f(-2)$

e) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$

f) $\lim_{x\to 1} f(x)$

g) $\lim_{x\to 2} f(x)$

h) $f(2)$

i) $\lim_{x\to 3} f(x)$

j) $f(3)$

k) $\lim_{x\to \infty} f(x)$

l) Pour quelles valeurs de x la fonction f a-t-elle des discontinuités essentielles ?

Question 3 (80 points)
Évaluer les limites suivantes si elles existent. Indiquez à quelle étape de votre démarche vous utilisez la continuité.

a) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{16^x}{6/x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 8} \frac{x+6}{\sqrt{x-4}}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{x+1}{x-2}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \sqrt{2-x}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{3x^2+3x+1}{2x^3+2x+1}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2+2x-3}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{x^3-3x^2+3x-1}$

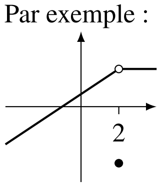
Solutions

Question 1

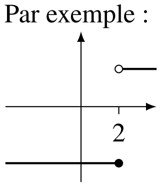
a) Faux. (Une limite de la forme « 0/0 » peut avoir une valeur, même si on ne peut la déterminer directement par continuité)

b) Faux (elle n'est pas définie en $x = \pm\sqrt{2}$, elle n'est donc pas continue pour ces valeurs de x.)

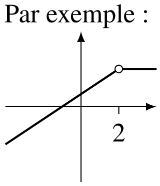
c) Par exemple :



d) Par exemple :



e) Par exemple :



Question 2

a) 0

b) $-\infty$

c) $\nexists$

d) Pas défini

e) 2

f) $\nexists$

g) 1

h) 3

i) 1

j) 1

k) 1

l) f a des discontinuité essentielles en $x = -2$ et $x = 1$.

Question 3

a) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{16^x}{6/x} \overset{\text{cont.}}{=} \dfrac{16^{1/2}}{\left(\frac{6}{1/2}\right)} = 1/3$

b) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{x+6}{\sqrt{x-4}} \overset{\text{cont.}}{=} \dfrac{8+6}{\sqrt{8-4}} = 7$

c) $\frac{3}{0^-} = 3\frac{1}{0^-} = 3(-\infty) = -\infty$

d) $\sqrt{2-2^+} = \sqrt{0^-}\nexists$

e) On peut évaluer directement la limite car la fonction est continue en $x = 1$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2+3x+1}{2x^3+2x+1} \overset{\text{cont.}}{=} \frac{3(1)^2+3(1)+1}{2(1)^3+2(1)+1} = 7/5$$

f) En factorisant et simplificant le facteur $x-1$ au numérateur et au dénominateur, on obtient que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2+2x-3} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+3)}\\ &= \lim_{x\to 1} \frac{(x^2+x+1)}{(x+3)}\\ &= \frac{3}{4} \quad \text{(continuité)}\end{aligned}$$

g) C'est une forme « 0/0 ». En mettant le dénominateur au dénominateur commun, on obtient que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}} &= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{\left(\frac{2-x}{2x}\right)}\\ &= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{1}\frac{2x}{2-x}\\ &= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{1}\frac{2x}{-(x-2)}\\ &= \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)}{1}\frac{2x}{-1}\\ &= -((2)+2)(2(2)) \quad \text{(continuité)}\\ &= -16\end{aligned}$$

h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^2}{x^3-3x^2+3x-1}$ est une forme « 0/0 ». On lève l'indétermination en simplifiant le facteur commun $(x-1)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{x^3-3x^2+3x-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)(1+x)}{(x-1)^3}\\ &= \lim_{x\to 1} \frac{(1+x)}{(x-1)^2}\\ &= \frac{2}{0^+} \quad \text{(continuité)}\\ &= \infty\end{aligned}$$