Yannick Delbecque — Département de mathématiques, Cégep St-Laurent
Mathématiques générales 2 — 201-735 — Hiver 2018

Formatif 2

L'usage de la calculatrice est interdit. Aucune documentation est permise. Une réponse sans justification, même exacte, vaut au plus 50 % des points. Durée de l'examen : 2h20.

Question 1
Soit $f(x) = x^2$.

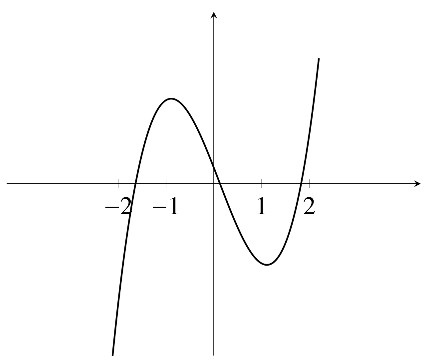
a) Donner le taux de variation moyen de $f(x)$ entre $x = -1$ et $x = 2$. Faire une esquisse qui illustre les éléments importants du calcul.

b) Écrire la définition de $f'(x)$ en terme de limites et faire un dessin qui explique les éléments importants de la définition.

c) Calculer $f'(-1)$ à l'aide de la définition.

Question 2
Trouver l'équation de la droite tangente au graphe de la fonction $f(x) = x^3$ en $x = -2$.

Question 3
Considérer la fonction décrite dans le graphique suivant.



Dire si la dérivée $f'(x)$ est positive, négative ou nulle chacune des valeurs de x suivantes.

a) $x = -2$ b) $x = -1$ c) $x = 0$

Question 4
Calculer les dérivées suivantes. Simplifier les résultats ; ne pas laisser d'exposants fractionnaires ou négatifs.

a) $\left(x^3 + 2\pi x + \pi^2\right)'$

b) y' si $y = \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{x}{3\sqrt{x}}$

c) $f'(x)$ si $f(x) = \left(x^2 + 1\right)\sqrt{x+1}$

d) $\left(\dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}\right)'$

e) $\dfrac{dy}{dx}$ si $y = \left(\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 - 1}\right)'$

f) y' si $y = \left(\frac{1}{x^2} + 1\right)^{100}$

Question 5
Soit $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 1$. Déterminer les valeurs de x où $f'(x) = 0$. À quoi ces valeurs correspondent-elles dans le graphique de $f(x)$?

Question 6
La hauteur h d'un projectile sur mars est donnée en fonction du temps t par l'équation

$$h = -6t^2 + 24t + 3.$$

a) Déterminer à quel moment le projectile est au plus haut de sa trajectoire.

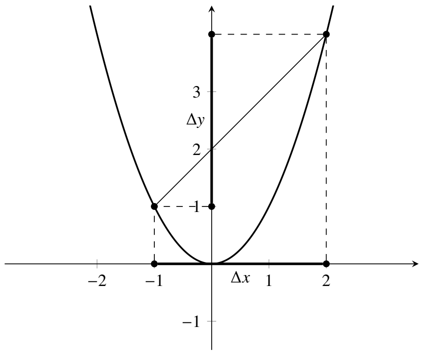
b) À quel moment le projectile revient-t-il à sa hauteur initiale de 3 m en retombant ?

c) Quelle est la vitesse du projectile à ce moment ?

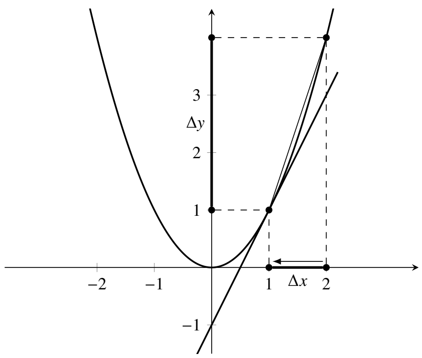
Solutions

Question 1

a) $\Delta x = 2-(-1) = 3.$
$\Delta y = f(2) - f(-1) = 4 - (1) = 3$ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{3}{3} = 1.$



b) $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$



c)

$$\begin{aligned}
f'(1) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(-1+\Delta x) - f(-1)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(-1+\Delta x)^2 - 1}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(1+2\Delta x + \Delta x^2) - 1}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x(2+\Delta x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} 2 + \Delta x \\
&= 2
\end{aligned}$$

Question 2

$f'(x) = 3x^2$, donc la pente de la droite tangente en $x = -2$ est $f'(-2) = 3(-2)^2 = 12$. L'équation de la droite tangente est donc de la forme

$$y = 12x + b.$$

Pour déterminer l'ordonnée à l'origine b, on trouve le point de tangence. La droite est tangente à la fonction au point $(-2, f(-2)) = (-2, -8)$. En substituant ces coordonnées dans l'équation de la droite, on trouve

$$-8 = 12(-2) + b,$$

donc

$$b = -8 + 24 = 16.$$

L'équation de la droite tangente est donc

$$y = 12x + 16.$$

Question 3

a) $f'(-1) > 0$

b) $f'(-1) = 0$

c) $f'(-1) < 0$

Question 4

a) $3x^2 + 2\pi$
(Note : π^2 est une constante dont la dérivée est 0).

b)

$$\begin{aligned}
y' &= \left(3x^{-1/3} + \frac{1}{3}x^{1/2}\right)' \\
&= 3\left(\frac{-1}{3}\right)x^{-4/3} + \frac{1}{3}\frac{1}{2}x^{-1/2} \\
&= \frac{-1}{\sqrt[3]{x^4}} + \frac{1}{6\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (2x)\sqrt{x+1} + (x^2+1)\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \\
&= \frac{4x(x+1) + (x^2+1)}{2\sqrt{x+1}} \\
&= \frac{5x^2+4x+1}{2\sqrt{x+1}}
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x^2+x+1}{x+1}\right)' &= \frac{(2x+1)(x+1) - (x^2+x+1)(1)}{(x+1)^2} \\
&= \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \left((x^3-3x^2-1)^{1/3}\right)' \\
&= \frac{1}{3}(x^3-3x^2-1)^{-2/3}(x^3-3x^2-1)' \\
&= \frac{1}{3}(x^3-3x^2-1)^{-2/3}(3x^2-6x) \\
&= \frac{3}{3\sqrt[3]{(x^3-3x^2-1)^2}}(x^2-2x) \\
&= \frac{(x^2-2x)}{\sqrt[3]{(x^3-3x^2-1)^2}}
\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}
y' &= 100\left(\frac{1}{x^2}+1\right)^{99}\left(\frac{1}{x^2}+1\right)' \\
&= 100\left(\frac{1}{x^2}+1\right)^{99}\left(x^{-2}+1\right)' \\
&= 100\left(\frac{1}{x^2}+1\right)^{99}\left(-2x^{-3}\right) \\
&= 100\left(\frac{1}{x^2}+1\right)^{99}\frac{-2}{x^3} \\
&= -200\frac{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)^{99}}{x^3}
\end{aligned}$$

Question 5

$f'(x) = x^2 + x - 2.$

$f'(x) = 0 \iff x^2 + x - 1 = 0 \iff (x+1)(x-1) = 0 \iff x = -2$ ou $x = 1$

$f(x)$ a un maximum ou un minimum là où $f'(x) = 0$.

Question 6

a) Au plus haut de sa trajectoire, la vitesse h' est nulle. La vitesse en fonction du temps est la dérivée :

$$h' = -12t + 24.$$

On trouve donc que $h' = 0$ quand $t = 2$.

b) On résout $h = 3$:

$$\begin{aligned}
-6t^2 + 24t + 3 = 3 &\iff -6t^2 + 24t = 0 \\
&\iff -6t(t-4) = 0,
\end{aligned}$$

on trouve donc que $h = 3$ quand $t = 0$ (position initiale) et $t = 4$. Le projectile repasse donc à la même hauteur quand $t = 4$.

c) $h'|_{t=4} = -12(4) + 24 = -24$