Yannick Delbecque — Département de mathématiques, Cégep St-Laurent
Mathématiques générales 2 — 201-735 — Hiver 2018

Formatif 3

L'usage de la calculatrice est interdit. Aucune documentation est permise. Une réponse sans justification, même exacte, vaut au plus 50 % des points. Durée de l'examen : 2h20.

Question 1
Évaluer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \log_2\left(\sqrt{x}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+2}$

c) $\lim\limits_{x\to-3} 10^x$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \log_2\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Question 2
Déterminer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $2^{(x^2)} + 2^x$

b) $\ln(x^3)$

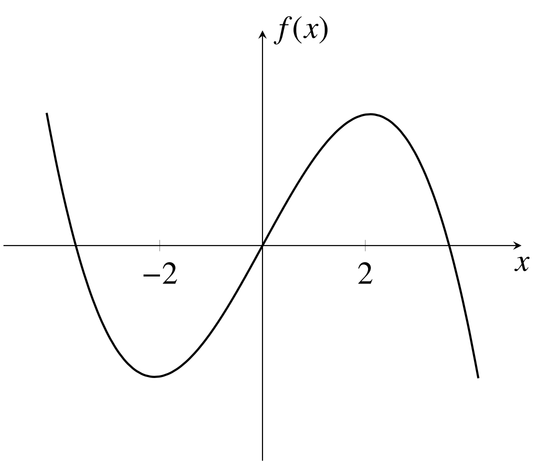
c) $\dfrac{e^{2x}}{x^2}$

d) $x^2 \log_2(x)$

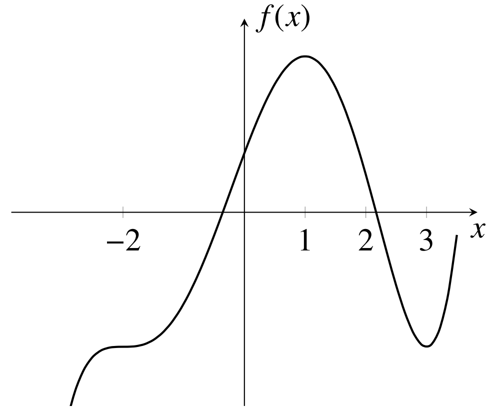
Question 3
Faire une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$ ayant le tableau de signe suivant :

x		0		1		3/2		2		9/4	
f'(x)	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+
f''(x)	+	0	+	0	-	-	-	0	+	+	+

Question 4
Faire le tableau de signe de $f'(x)$ et de $f''(x)$ pour la fonction ayant le graphe suivant :



Question 5
Soit $f(x)$ la fonction représentée dans le graphe suivant.



a) Faire un tableau de variation incluant $f'(x)$ et $f''(x)$ pour la fonction $f(x)$.

b) Esquisser le graphique de $f'(x)$.

Note : arrondissez les valeurs importantes de x à l'entier le plus près.

Question 6
Faire le tableau de variation de $f(x) = \frac{x^4}{4} + 2x^2 - 1$ et esquisser son graphique.

Question 7
Faire le tableau de variation de la fonction

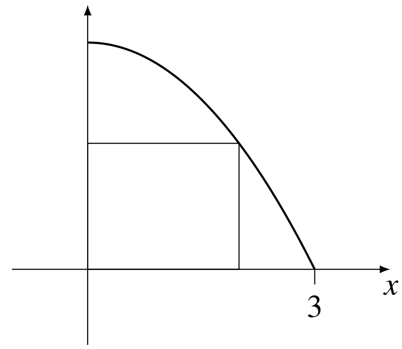
$$f(x) = \frac{x-1}{(x+2)^2}$$

et esquisser son graphique. Les dérivées de la fonction sont Indice : les dérivées première et seconde de $f(x)$ sont

$$f'(x) = -\frac{x-4}{(x+2)^3} \qquad f''(x) = \frac{2(x-7}{(x+2)^4}.$$

Vous devez montrer que ce sont les bonnes dérivées, mais vous pouvez terminer le problème avec ces deux résultats même si vous n'y arrivez pas.

Question 8
Déterminer le rectangle d'aire maximale pouvant être inscrit dans la région du premier quadrant sous la parabole $y = 9 - x^2$.



Solutions

Question 1

a) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \log_2(\sqrt{x}) = \log_2\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1/2$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty+2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty} = \infty$

c) $\lim\limits_{x\to-3} 10^x = 10^{-3} = \frac{1}{1000}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \log_2\left((\frac{1}{x}\right) = \log_2(\frac{1}{\infty}) = \log_2(0^+) = -\infty$

Question 2

a) $2x2^{x^2}\ln(2) + 2^x\ln(2)$

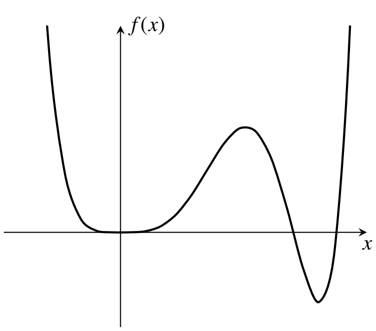
b) $\frac{3x^2}{x^3} = \frac{3}{x}$

c) $\frac{2x^2e^{2x} - e^{2x}(2x)}{x^4}$

d) $2x\log_2(x) + x^2\frac{1}{x\ln(2)} = 2x\log_2(x) + \frac{x}{\ln(2)}$

Question 3

x		0		1		3/2		2		9/4	
f'(x)	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+
f''(x)	+	0	+	0	-	-	-	0	+	+	+
$f(x)$	↘	MIN	↗	INF	↗	MAX	↘	INF	↘	MIN	↗



Question 4

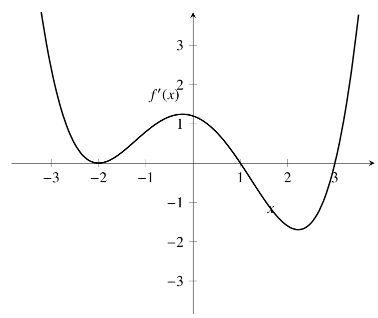
x		-2		0		2	
f'(x)	-	0	+	+	+	0	-
f''(x)	+	+	+	0	-	-	-

Question 5

a)

x		-2		0		1		2		3	
$f'(x)$	+	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+
$f''(x)$	-	0	+	0	-	-	-	0	+	+	+
$f(x)$	↗	STA	↗	INF	↗	MAX	↘	INF	↘	MIN	↗

b) Graphique de $f'(x)$:



Question 6

$f'(x) = -x(x-2)(x+2)$

Zéros de $f'(x)$: $x = 0$, $x = 2$ et $x = -2$.

$f''(x) = -3x^2 + 4 = -3(x^2 - 4/3) =$
$-3(x - 2/\sqrt{3})(x + 2/\sqrt{3})$.

Tableau de variation pour la dérivée et la dérivée seconde.

x		-2		$-\frac{2}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{2}{\sqrt{3}}$		2	
$f'(x)$	+	0	-	-	-	0	+	+	+	0	-
$f''(x)$	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-
$f(x)$	↗	MAX	↘	INF	↘	MIN	↗	INF	↗	MAX	↘

Question 7

$f'(x) = -\frac{x-4}{(x+2)^3}$.

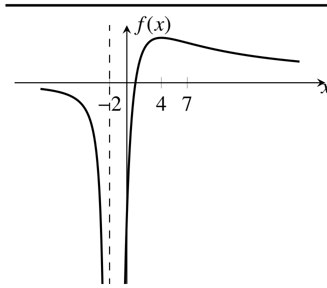
Zéro de $f'(x)$; $x = 4$. Division par zéro en $x = -2$.

$f''(x) = \frac{2(x-7)}{(x+2)^4}$.

Zéro de $f''(x)$; $x = 7$. Division par zéro en $x = -2$.

Tableau de variation pour la dérivée et la dérivée seconde.

x		-2		4		7	
$f'(x)$	-	∄	+	0	-	-	-
$f''(x)$	-	∄	-	-	-	0	+
$f(x)$	↘	AV	↗	MAX	↘	INF	↘



Question 8

L'aire du rectangle est $A = xy$. Comme le rectangle est inscrit entre les axes de coordonnées et la parabole $y = 9 - x^2$, on a que $y = 9x^2$. On substitue cette expression pour y dans A pour obtenir

$$A(x) = x(9 - x^2) = 9x - x^3.$$

On maximise cette fonction.

$$A'(x) = 9 - 3x^2.$$

$$9 - 3x^2 = 0 \iff x = \pm\sqrt{3}.$$

Comme on cherche un $x \geq 0$, on retient la solution $x = \sqrt{3}$.

On vérifie que l'on a bien un maximum en $x = \sqrt{3}$:

x	0		$\sqrt{3}$	
$f'(x)$	+	+	0	-

On détermine les dimentions du rectangle optimal : si $x = \sqrt{3}$, alors $y = 9 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 6$.