Exercices 3 – Calcul différentiel

Département de mathématiques – Cégep de Saint-Laurent
201-735 – Hiver 2018 – Professeur : Yannick Delbecque
http://prof.delbecque.org – prof@delbecque.org – Bureau C286 – 514-747-6521 poste 7289

Taux de variation moyen

Question 1
Déterminer les valeurs suivantes; simplifier le résultat.

a) Δy si $f(x) = x^2$ et x varie de 0 à 5.
b) Δy si $f(x) = x^2$ et x varie de -2 à 2.
c) Δy si $f(x) = x^2$ et x varie de -3 à -2.
d) Δy si $f(x) = x^3$ et x varie de -2 à 3.
e) Δy si $f(x) = \frac{1}{x}$ et x varie de 1 à 3.
f) Δy si $f(x) = x^2$ et x varie de 0 à Δx.
g) Δy si $f(x) = x^2$ et x varie de 1 à $1 + \Delta x$.
h) Δy si $f(x) = x^3$ et x varie de -2 à $-2 + \Delta x$.
i) Δy si $f(x) = \frac{1}{x}$ et x varie de 1 à $1 + \Delta x$.
j) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ si $f(x) = \dfrac{1}{x}$ quand x varie de 1 à 3.
k) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ si $f(x) = \dfrac{1}{x}$ quand x varie de 1 à $1 + \Delta x$.
l) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ si $f(x) = x^2$ quand x varie de x à $x + \Delta x$
m) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ si $f(x) = x^3$ quand x varie de x à $x + \Delta x$
n) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ si $f(x) = \frac{1}{x}$ quand x varie de x à $x + \Delta x$
o) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ si $f(x) = \sqrt{x}$ quand x varie de x à $x + \Delta x$

Question 2
Déterminer l'équation de la droite $y = ax + b$ qui passe par les points donnés. Faire une esquisse représentant la fonction et la droite.

a) $(1, f(1))$ et $(2, f(2))$ pour $f(x) = x^2$
b) $(0, f(0))$ et $(2, f(2))$ pour $f(x) = x^3$
c) $(1, f(1))$ et $(2, f(2))$ pour $f(x) = \frac{1}{x}$
d) $(1, f(1))$ et $(2, f(2))$ pour $f(x) = \sqrt{x}$
e) $(1, f(1))$ et $(1, f(1 + \Delta x))$ pour $f(x) = x^2$
f) $(0, f(0))$ et $(0, f(\Delta x))$ pour $f(x) = x^3$

Question 3
Montrer que l'équation de la droite qui passe par les points $(a, f(a))$ et $(a + \Delta x), f(a + \Delta x)$ du graphe d'une fonction f est

$$y = f(a) + \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - a).$$

Faire une esquisse représentant la situation.

Question 4
Soit la fonction définie par l'équation $y = x^3$. Calculer le taux de variation moyen $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sur l'intervalle demandé. Donner la valeur de Δx pour chacun des cas

a) $[2, 4]$
b) $[2, 3]$
c) $[2, 2.1]$
d) $[2, 2.01]$
e) $[2, 2.001]$.

Question 5
Déterminer à l'aide des résultats de la question précédente vers quel nombre semble s'approcher le taux de variation de $y = x^3$ entre 2 et $2 + \Delta x$ lorsque $\Delta x \to 0$?

Question 6
Soit la fonction $f(x) = x^3 - x$

a) Calculer $\text{TVM}_{[2,4]} f(x)$.
b) Calculer $\text{TVM}_{[a,b]} f(x)$.
c) Calculer $\text{TVM}_{[x,x+h]} f(x)$.

Question 7
La fonction donnant l'aire d'un cercle (en centimètres carrés) par rapport à son rayon (en centimètres) est $A(r) = \pi r^2$

a) Quelle est la variation de l'aire du cercle si le rayon passe de 2 cm à 4 cm ?
b) Quelle est le taux de variation moyen de l'aire du cercle si le rayon passe de 2 cm à 4 cm ?
c) Quelle est le taux de variation instantané de l'aire du cercle lorsque le rayon est de 4 cm ?

Question 8
Loi de refroidissement (ou du réchauffement) de Newton : si T est la température d'un objet, A la température ambiante et t le temps écoulé, le taux de variation $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ de la température par rapport au temps est proportionnel à la différence entre la température de l'objet et la température ambiante :

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = C(T - A)$$

où C est la constante de proportionnalité (qui dépend du système).

Après la chute de météorites survenue sur la ville de Tcheliabinsk en Russie en février 2013, des chercheurs s'apprêtent à récupérer des fragments de la météorite dans la zone sinistrée.

Les chercheurs sont arrivés sur le site à 14 h et ont remarqué que la température d'un fragment était de 140°C. Deux heures plus tard, la température a chuté de 50°C.

Sachant que la température ce jour là était de -10°C et que la météorite a touché le sol à 10 h, déterminer la température du fragment au moment précis où la météorite a touché le sol.

Taux de variation instantané

Question 9
Déterminer le TVI des fonctions suivantes au point donné. Déterminer l'équation de la droit tangente au graphe de f à ce point.

a) $f(x) = x^2$ quand $x = 2$.
b) $f(x) = x^2 - 1$ quand $x = 2$.
c) $f(x) = x^3$ quand $x = 2$.
d) $f(x) = 3x$ quand $x = 2$.
e) $f(x) = 2$ quand $x = 2$.
f) $f(x) = \frac{1}{x}$ quand $x = 2$.
g) $f(x) = \frac{3}{x^2}$ quand $x = 2$.
h) $f(x) = x^2$ quand $x = a$.
i) $f(x) = x^3$ quand $x = a$.

Question 10
Déterminer en utilisant le TVI laquelle des deux fonctions suivantes croit le plus rapidement en $x = 1$:

$$f(x) = x^2 \text{ ou } f(x) = -\frac{1}{x}?$$

Question 11
Supposons que durant les deux premières années de sa vie, la masse (en kilogrammes) d'un bébé en fonction du temps t (en mois) écoulé depuis sa naissance est donnée par la fonction $m(t) = \sqrt{12 + 7t}$.

a) Quelle est la masse du bébé à sa naissance ?
b) Évaluer l'expression $\dfrac{m(8) - m(5)}{3}$ et en donner un interprétation.
c) Quelle fonction donne le taux de croissance instantané de la masse du bébé ?
d) Quel est le taux de croissance instantané de la masse du bébé lorsque celui-ci est âgé de 9 mois ? Interpréter.
e) Le bébé grossit-il plus rapidement à 3 mois ou à 9 mois ?

Fonction dérivée

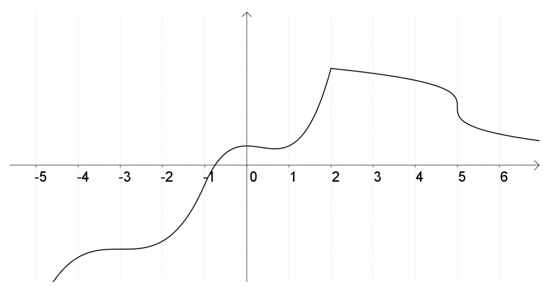
Question 12
Utiliser les deux formes de la définition de la dérivée pour calculer $f'(2)$ si $f(x) = x^3$.

Question 13
Trouver la dérivée des fonctions suivantes en utilisant la définition

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

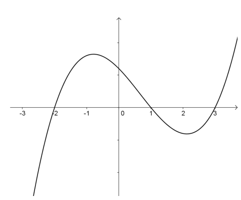
a) $f(x) = x^2$
b) $f(x) = x^3$
c) $g(x) = \sqrt{x + 3}$
d) $h(x) = \dfrac{x+3}{x+5}$
e) $f(x) = 2x^2 - x$; $f'(2)$.
f) $x(t) = at^2 + bt + c$; $\dfrac{dx}{dt}$.
g) $y = \sqrt{x^2 + 1}$; $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=-1}$.
h) $g(x) = \dfrac{2}{3x} - \dfrac{1}{3x^2}$; $g'(x)$.

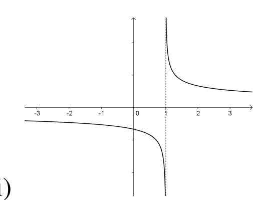
Question 14
Soit la fonction représentée par le graphique ci-dessous.

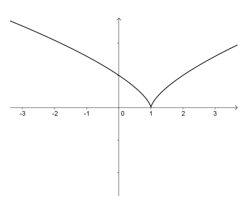


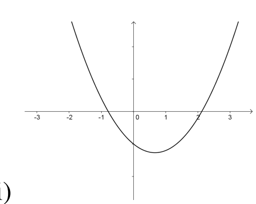
a) Pour quelle(s) valeur(s) de x la dérivée de cette fonction est-elle nulle ?
b) Pour quelle(s) valeur(s) de x cette fonction n'est-elle pas dérivable ?
c) La dérivée de cette fonction est-elle plus grande en $x = -1$ ou en $x = 1$?

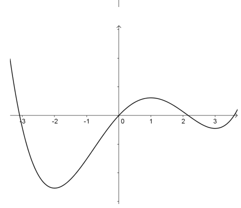
Question 15
Associer chacune des fonctions suivantes à sa dérivée.

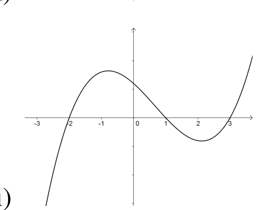

a)


i)


b)


ii)


c)


iii)

Solutions

Question 1

a) $\Delta y = 25$

b) $\Delta y = 0$

c) $\Delta y = -5$

d) $\Delta y = 35$

e) $\Delta y = -2/3$

f) $\Delta y = \Delta x^2$

g) $\Delta y = (1+\Delta x)^2$

h) $\Delta y = (-2+\Delta x)^3 - 8$

i) $\Delta y = \frac{1}{1+\Delta x} - 1$

j) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1/3 - 1/1}{2} = -\frac{1}{3}$

k) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\frac{1}{1+\Delta x} - 1}{\Delta x}$

l) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$

m) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$

n) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x}$

o) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$

Question 2

a) $y = 3x - 2$

b) $y = 4x$

c) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

d) $(\sqrt{2}-1)x - (\sqrt{2}+2)$

e) $y = \frac{(1+\Delta x)^2}{\Delta x}x + (1 - \frac{(1+\Delta x)^2}{\Delta x}$

f) $x\Delta x^2$

Question 3

On peut faire la démonstration de différentes manières. Montrons que que la droite définie par l'équation donnée passe par les deux points donnés. En $(a, f(a))$, on a que

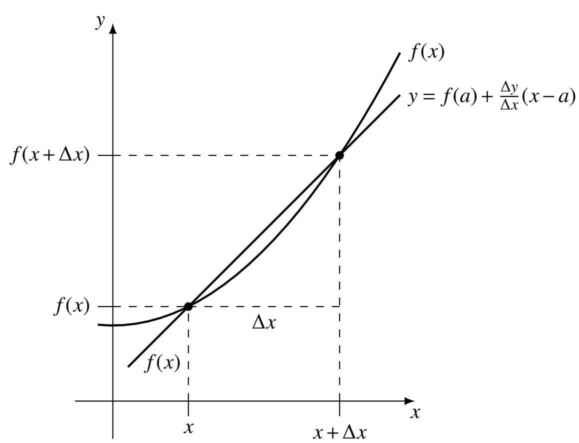
$$\begin{aligned} y &= f(a) + \frac{\Delta y}{\Delta x}(x-a) \\ f(a) &= f(a) + \frac{\Delta y}{\Delta x}(a-a) \\ f(a) &= f(a) \end{aligned}$$

L'équation de la droite est donc satisfaite en ce point.

Au point $(a+\Delta x, f(a+\Delta x))$, on a que

$$\begin{aligned} y &= f(a) + \frac{\Delta y}{\Delta x}(x-a) \\ f(a+\Delta x) &= f(a) + \frac{\Delta y}{\Delta x}((a+\Delta x)-a) \\ f(a+\Delta x) &= f(a) + \frac{\Delta y}{\Delta x}\Delta x \\ f(a+\Delta x) &= f(a) + \Delta y \\ f(a+\Delta x) &= f(a) + (f(a+\Delta x) - f(a)) \\ f(a+\Delta x) &= f(a+\Delta x) \end{aligned}$$

L'équation de la droite est donc aussi satisfaite pour l'autre point. Ainsi, comme la droite passe par les deux points donnés, c'est bien l'équation de la droite cherchée.



Question 4

a) $\frac{4^3-2^3}{4-2} = 28$, $\Delta x = 2$

b) 19, $\Delta x = 1$

c) 12.61, $\Delta x = 0.1$

d) 12.0601, $\Delta x = 0.01$

e) 12.006001, $\Delta x = 0.001$

Question 5

12

Question 6

a) 27

b) $\dfrac{b^3 - b - \left(a^3 - a\right)}{b-a} = b^2 + ab + a^2 - 1$

c) $\dfrac{(x+h)^3 - (x+h) - \left(x^3 - x\right)}{h} = 3x^2 + 3xh - 1$

Question 7

a) 12π cm^2

b) 6π cm

c) 8π cm

Question 8

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T}{\Delta t} &= C(T-A) \\ \frac{90}{2} &= C(140 - (-10)) \\ 45 &= C(150) \\ C &= \frac{150}{45} = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T}{\Delta t} &= \frac{10}{3}(T+10) \\ \Delta T &= \frac{10}{3}(T+10)\Delta t \\ \Delta T &= \frac{10}{3}(140+10)(10-14) \\ \Delta T &= \frac{10}{3}(150)(-4) = -2000 \\ \Delta T &= T_{\text{fin}} - T_{\text{ini}} \\ T_{\text{ini}} &= T_{\text{fin}} - \Delta T = 140 - (-2000) = 2140. \end{aligned}$$

Question 9

a) 4, $y = 4x - 4$

b) 4, $y = 4x - 7$

c) 12, $y = 12x - 16$

d) 3, $y = 3x$

e) 0, $y = 2$

f) $-\frac{1}{4}$, $y = -\frac{x}{4} + 1$

g) $-\frac{3}{4}$, $y = -\frac{3x}{4} - \frac{3}{4}$

h) $2a$, $y = 2ax - a^2$

i) $3a^2$ $y = 3a^3x - 2a^3$

Question 10

$\text{TVI}_f(1) = 2$, $\text{TVI}_g(1) = 1$, la fonction f croit donc plus rapidement que g en $x = 1$.

Question 11

a) $\sqrt{12}$ kg

b) Entre l'âge de 5 mois et 8 mois, la masse de ce bébé a augmenté à un taux moyen de $\frac{\sqrt{68}-\sqrt{47}}{3}$ kg/mois ≈= 0,4635 kg/mois.

c) $m'(t) = \dfrac{7}{2\sqrt{12+7t}}$.

d) À l'âge d'exactement 9 mois, le bébé grossit à un taux de
$$m'(9) = \frac{7}{2\sqrt{75}} \text{ kg/mois.}$$

e) Le bébé grossi plus rapidement à 3 mois, car $TVI_3(m) > TVI_9(m)$.

Question 12

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(2+\Delta x)^3 - 2^3}{\Delta x} = 12$

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 2^3}{x-2} = 12$ en utilisant $x^3 - 2^3 = (x-2)(x^2+2x+4)$ pour lever l'indétermination.

Question 13

a) $f'(x) = 2x$

b) $f'(x) = 3x^2$

c) $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}$

d) $h'(x) = \dfrac{2}{(x+5)^2}$

e) 7

f) $2at + b$

g) -2

h) $g'(x) = \frac{-2}{3x^2} + \frac{2}{3x^3}$

Question 14

a) $x \in \left\{-3,\ -\frac{1}{4},\ \frac{2}{3}\right\}$

b) $x \in \{2,\ 5\}$

c) En $x = -1$

Question 15

a) ii)

b) i)

c) iii)