Formules de dérivation

Question 1
En utilisant la définition de la dérivée, évaluer les expressions demandées pour la fonction donnée.

a) $f'(2)$ pour $f(x) = 2x^2 - x$.
b) $\dfrac{dx}{dt}$ pour $x(t) = at^2 + bt + c$.
c) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=-1}$ pour $y = \sqrt{x^2+1}$.
d) $g'(x)$ pour $g(x) = \dfrac{2}{3x} - \dfrac{1}{3x^2}$.
e) $h'(0)$ pour $h(x) = \dfrac{-4x}{\sqrt{1-5x}}$.

Question 2
Trouver la dérivée des fonctions suivantes à l'aide des propriétés de la dérivée. Exprimer le résultat sans utiliser d'exposants fractionnaires ou négatifs.

a) $y = x^9$
b) $y = x^{-12}$
c) $f(x) = x^{7/4}$
d) $y = \dfrac{1}{x^3}$
e) $y = \dfrac{1}{x^6}$
f) $f(x) = \sqrt[5]{x}$
g) $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$
h) $u = \sqrt[5]{x^2}$
i) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$
j) $x(t) = \dfrac{3}{7\sqrt[3]{t^5}}$

Question 3
Trouver la dérivée des fonctions suivantes.

a) $f(x) = 4$
b) $v(t) = t$
c) $h(x) = 5x^3$
d) $x(t) = \dfrac{3t}{4}$
e) $y = -\dfrac{9}{5\sqrt[4]{x}}$
f) $x(r) = \dfrac{5}{8r}$
g) $f(x) = 8x^3 - 4x^2 + 9x - 1$
h) $y = \dfrac{4}{\sqrt[3]{x^2}} - 5x^7 + \dfrac{1}{6x^3} - \dfrac{3}{4}$
i) $f(x) = \left(x^2-3\right)(4x+1)$
j) $y = 5\left(2-x^3\right)^2$
k) $f(x) = (3x+1)^3$
l) $g(t) = 4\left(\dfrac{3}{t^2}+1\right)\left(1-t^3\right)$

Question 4
Donner la dérivée de chacune des fonctions au point indiqué.

a) $f(x) = 3x + 1$ au point $(2, 7)$.
b) $s(t) = -t^3 + 2t^2 + 3t - 2$ au point $(-1, -2)$.
c) $y = \dfrac{2}{3x} - \dfrac{4}{5x^2}$ au point $(1, -2/15)$.
d) $f(t) = \dfrac{t^3-4t}{2}$ au point $(k, f(k))$.

Question 5
Pour quelle(s) valeur(s) de x la courbe décrite par la fonction $f(x)$ admet-elle une tangente horizontale ?

a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$.
b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$.
c) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

Question 6
Donner l'équation de la droite tangente au graphe de f pour la valeur donnée de x.

a) $f(x) = x^2$, en $x = -2$.
b) $f(x) = x^3$, en $x = 1$.
c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, en $x = 1$.
d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, en $x = 3$.
e) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, en $x = \sqrt{2}$.
f) $f(x) = \sqrt{x}$, en $x = 1$.
g) $f(x) = \sqrt{x}$, en $x = 4$.

Question 7
Déterminer le point de la courbe où la tangente au graphe de f est parallèle à l'axe des x.

Question 8
Trouver une valeur de x pour laquelle la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ admet une droite tangente parallèle à la droite $y = \frac{x}{4} - 1$.

Question 9
Trouver deux valeurs de x pour laquelle la fonction $f(x) = x^3 - 3x$ admet une droite tangente perpendiculaire à la droite $y = \frac{3x}{5} - 1$. (Rappel : si deux droites sont perpendiculaires, le produit de leur pentes est -1.)

Question 10
On lance verticalement vers le haut un objet. La hauteur (en mètres) de l'objet t secondes après avoir été lancé est donnée par la fonction $h(t) = 50 + 15t - 4{,}9t^2$.

a) À quelle hauteur l'objet se trouve-t-il au moment où il est lancé ?
b) Quelle est la vitesse initiale de l'objet ?
c) Quelle est la vitesse de l'objet lorsqu'il atteint la hauteur de 60 m lors de sa montée ?

d) Sachant qu'il commencera à descendre au moment où sa vitesse est nulle, quelle est la hauteur maximale atteinte par l'objet ?

e) À quelle vitesse l'objet touchera-t-il le sol ?

f) Trouver l'accélération de cet objet au temps t.

Question 11
Calculer la dérivée de $x^2(2x-1)$ de deux manières différentes : en utilisant la règle du produit et en distribuant x^2 sur $(2x-1)$. Vérifier que le résultat est le même dans les deux cas.

Question 12
Trouver la dérivée des fonctions suivantes en utilisant la règle de dérivation du produit et simplifier le résultat obtenu.

a) $y=(2x-1)(5x+1)$.

b) $y=(3x+1)\left(2-5x^3\right)$.

c) $x(t)=\left(\sqrt{t}-t\right)\left(4t^3-2t^2+5\right)$.

d) $y=x(3x-1)-(2x-5)\left(4-3x^2\right)$.

e) $f(x)=(x+1)(2x+1)(3x+1)$.

f) $f(x)=x^3\left(5x^2-4\right)\left(3-x^4\right)$.

Question 13
Trouver la dérivée des fonctions suivantes en utilisant la règle de dérivation du quotient et simplifier le résultat obtenu.

a) $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$.

b) $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$.

c) $y=\dfrac{2x^4}{x^4+1}$.

d) $d(t)=\dfrac{4t^2-5}{5-4t^3}$.

e) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{1-x}$.

Question 14
Calculer la dérivée des fonctions suivantes sans utiliser la règle du quotient.

a) $f(x)=\dfrac{x^3-3x+1}{\pi}$

b) $y=\dfrac{-17}{3\left(x^2-x+6\right)}$

c) $y=\dfrac{4}{\sqrt[3]{x^2+4x+2}}$

Question 15
Donner la dérivée de chacune des fonctions au point indiqué.

a) $f(x)=\dfrac{-x^2+6x+2}{2-3x}$ au point $(0,1)$.

b) $y=\left(t^2-3t-2\right)\left(\sqrt{t}+2t\right)$ au point $(1,-12)$.

c) $f(x)=\dfrac{1}{x^7-1}-\dfrac{1}{9-x^2}$ au point $(-1,-\frac{5}{8})$.

Question 16
La relation entre l'aire de la pupille d'un oeil humain (en millimètres carrés) et l'intensité x d'une source lumineuse est donné par la fonction $A(x)=\dfrac{40+24x^4}{1+4x^4}$. Plus la source est intense, plus la pupille se contracte et son aire diminue. On définit la sensibilité de la pupille à une source lumineuse par la fonction $S(x)=\dfrac{dA}{dx}$.

a) Quelle est l'aire de la pupille lorsque l'intensité lumineuse est nulle ?

b) Quelle est l'aire d'une pupille soumise à une source lumineuse très intense ?

c) Quelle est la sensibilité de la pupille en fonction de l'intensité d'une source lumineuse ?

Question 17
Soient u, v et w des fonctions dérivables de x. Montrer que

$$(uvw)'=u'uv+uv'w+uvw'.$$

Question 18
Montrer qu'aucune droite de pente 1 n'est tangente à la courbe de

$$f(x)=\frac{x^2}{x-1}.$$

Question 19
Il y a deux droites passant par le point $(4,20)$ qui sont tangentes à la courbe décrite par la fonction $f(x)=8x-x^2$. Trouver les équations de ces droites.

Question 20
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $y=\dfrac{x^n}{x^n-1}$

b) $y=\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x^2}$

c) $y=\dfrac{\sqrt{x}(10-x)}{x^3-8}$

d) $y=\dfrac{4x^3-x^2}{(x+1)\sqrt[4]{x}}$

Dérivée de fonctions composées

Question 21
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $f(t)=\left(3x^2-x+1\right)^5$

b) $f(t)=(2x+1)^{99}$

c) $g(t)=\left(1-5t^4\right)^{10}$

d) $y=\left(5x^2-3x+2\right)^{\frac{7}{2}}$

e) $f(x)=\sqrt{x^5+1}$

f) $g(x)=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^3$

g) $x(t)=\sqrt{\dfrac{mt}{1+t}}$

h) $f(x)=5\sqrt[3]{8-x}$

Question 22
Soit $y = \sqrt{x}$, $x = 6t^2 - 5t$ et $z = \frac{1}{y}$. Calculer les dérivées suivantes.

a) $\dfrac{dx}{dt}$ et $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=2}$

b) $\dfrac{dz}{dy}$ et $\left.\dfrac{dz}{dy}\right|_{y=-3}$

c) $\dfrac{dy}{dt}$ et $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=-1}$

d) $\dfrac{dz}{dx}$ et $\left.\dfrac{dz}{dx}\right|_{x=\frac{1}{9}}$

Question 23
On a observé que la masse m (en kilogrammes) d'un poisson d'une certaine espèce dépend de sa longueur L (en mètres) par la fonction $m = 4L^2$. Supposons que le taux de croissance de la longueur par rapport au temps (en années) est de $(0,3 - 0,2L)$ m/an.

a) Trouver l'expression de $\dfrac{dm}{dt}$ en fonction de L. Indiquer les unités.

b) Évaluer $\left.\dfrac{dm}{dt}\right|_{m=4}$ et interpréter le résultat obtenu dans le contexte donné.

Question 24
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $y = \left[\left(x^3 + 2x\right)^4 + 3x\right]^5$

b) $y = (3x+4)^{14}\left(x^2 - 2\right)^{18}$

c) $f(t) = \sqrt{(2t+\pi)^3(2-5t)}$

d) $y = \dfrac{\left(2x^3+1\right)^3}{\sqrt{x+3}}$

e) $f(x) = \sqrt{x^2 + \sqrt{3x+1}}$

Dérivée implicite

Question 25
Déterminer, parmi les équations suivantes, celles qui définissent une fonction implicite.

(a) $y = \dfrac{3t+1}{4t}$

(b) $y = \dfrac{3y+1}{4x}$

(c) $x^2 + 5x + 6 = y$

(d) $xy^2 + 5y^2 = 3x + y$

Question 26
Calculer les dérivées implicites suivantes.

a) $\dfrac{dy}{dx}$ si $x + y^2 = 1$.

b) $\dfrac{dy}{dx}$ si $x^3 + y^3 = 1$.

c) $\dfrac{dy}{dx}$ si $xy = 1$.

d) $\dfrac{dx}{dt}$ si $\sqrt{x^2+t^2} = 2t^2 + 4$.

e) $\dfrac{dx}{dy}$ si $x^3 - 4y^3 = 5x^2 + 6y^3$.

f) $\dfrac{dy}{dx}$ si $x = \dfrac{3y - y^2}{2y+3}$.

g) $\dfrac{dy}{dx}$ si $x^2y^2 + x^3y = 6x$.

Question 27
Déterminer l'équation de la droite tangente à la courbe décrite par l'équation $x^3 + y^3 = 2xy$ au point $(1, 1)$.

Question 28
Soit le cercle d'équation $x^2 + y^2 = r^2$ (cercle de rayon r centré à l'origine). Montrer que la droite passant par l'origine et un point (x_0, y_0) situé sur la circonférence du cercle est toujours perpendiculaire à la droite tangente au cercle en ce point (x_0, y_0).

Question 29
Trouver la pente de la droite tangente à l'astéroïde $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$, illustrée ci-dessous, au point $\left(1, -3\sqrt{3}\right)$.

graphs/ch2_1.png

Dérivée d'ordre supérieur

Question 30
Calculer les dérivées suivantes.

a) $f^{(4)}(x)$, si $f(x) = x^5 + 7x$.

b) $y^{(9)}$, si $y = x^7$.

c) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, si $y = \left(x^3+1\right)^5$.

d) $f''(1)$, si $f(x) = \frac{4x^5 - 2x}{x^3}$.

e) $\left.\dfrac{d^3y}{dx^3}\right|_{x=4}$, si $y = \sqrt{x^7} - 3x$.

f) $f^{(5)}(x)$, si $f(x) = \dfrac{1}{x^5}$.

Exercices récapitulatifs

Question 31
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $f(x) = x^6$

b) $f(x) = \dfrac{-2}{\sqrt[3]{x}}$

c) $f(x) = \sqrt{x^3}$

d) $f(x) = 8x^3 - 4x^2 + 9x - 1$

e) $f(x) = -4x^8 + \dfrac{x^{-2}}{5} - \dfrac{4}{3}$

f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{3} - x^4 - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

g) $f(x) = (3x-1)(4-x^3)$

h) $f(x) = \left(\sqrt{x}+x\right)\left(2x-5x^3+9\right)$

i) $f(x) = x^2\left(5x^2-1\right)\left(5-7x^3\right)$

j) $f(x) = x(3x-2) - (5x-3)(6-2x)$

k) $f(x) = \dfrac{3x}{x-1}$

l) $f(x) = \dfrac{x^3-x^2+6}{x}$

m) $f(x) = \dfrac{4x^2-5}{6-2x^4}$

n) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2-x}$

o) $f(x) = \dfrac{x}{x+2} + \dfrac{x+2}{x^2}$

p) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}(6-x)}{x^2-4}$

Question 32
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $y = \dfrac{7}{4x^{\frac{3}{4}}} - \dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 4^4$

b) $y = \dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{6}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{\sqrt[5]{x}}{8}$

c) $y = \dfrac{x^2-x+1}{x^3+2}$

d) $y = \left(x^3-1\right)^7$

e) $y = x^2 + \sqrt{3x-1}$

f) $y = x^2\sqrt{3x-1}$

g) $y = \dfrac{\sqrt{x}+1}{x}$

h) $y = (2-x)^5(7x+3)$

i) $y = 5\sqrt[3]{2x^2+5x+7}$

j) $y = 7\left(\dfrac{x^2+4}{x^2-4}\right)$

Question 33
La droite $y = 4x-17$ est-elle tangente à la courbe de $f(x) = x^2-2x-8$? Si oui, déterminer le point de tangence.

Question 34
Soit la fonction $f(x) = (4x-9)^2+3$. Déterminer la ou les valeurs de a telles que la droite tangente à la courbe de f en $x = a$ et les axes forment un triangle isocèle.

Question 35
Lors d'un test de collision, une voiture se déplace en ligne droite vers un mur situé à 90 m du point de départ de la voiture. La position s de la voiture (en mètres) à partir de son point de départ t secondes après son départ est donnée par $s(t) = 4t + \dfrac{t^2}{2}$.

a) À quelle distance du mur la voiture se trouve-t-elle 2 s après son départ ?

b) Quelle est sa vitesse 2 s après son départ ?

c) À quelle distance du mur la voiture se trouve-t-elle lorsque sa vitesse est de 30 km/h ?

d) Combien de temps lui faut-il avant d'entrer en collision avec le mur ?

e) Quelle est sa vitesse lors de l'impact ?

f) Quelle est son accélération au moment de l'impact ?

Question 36
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $y = \left(x^2+3\right)^4\left(2x^3-5\right)^3$

b) $y = \left[\left(x^2-5\right)^8 + x^7\right]^{18}$

c) $y = 5(x-7)\sqrt{x-1}$

d) $y = x^2\left(x^3+2\right)^5 - \dfrac{8}{x^8-5}$

e) $y = \dfrac{1+\frac{4}{x}}{4+\frac{1}{x}}$

f) $y = \dfrac{2x^2-1}{x\sqrt{1+x^2}}$

g) $y = x^4\sqrt[5]{\dfrac{x+1}{x-1}}$

h) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\left(\dfrac{x^2}{1-x}\right)^2}}$

Question 37
Calculer $\dfrac{dy}{dx}$ pour chacune des équations suivantes.

a) $2x^2+3xy-y^2 = 1$

b) $3x^2y^3+5x = 3-5y^3$

c) $\dfrac{1}{x} - 3xy = \dfrac{1}{y}$

d) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{x-y}{x+y}$

Question 38
Pour chacune des équations suivantes, calculer la pente de la tangente à la courbe au point donné.

a) $4x^2+9y^2 = 40$ au point $(-1,-2)$

b) $x^2y^2(1+xy)+4 = 0$ au point $(1,-2)$

Question 39
En utilisant la formule de la dérivée d'un produit de deux fonctions, montrer que

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(f(x))^2}.$$

Question 40
Supposons que u et v sont toutes deux des fonctions de x.

a) Montrer que $(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$.

b) Trouver une formule pour $(uv)'''$.

c) Sans faire trop de calculs, trouver une formule pour $\dfrac{d^6(uv)}{dx^6}$.

Question 41
Trouver la valeur de k pour que la courbe d'équation $y = -x^2 + kx$ soit tangente à la droite $y = x + 4$.
(Indice : faire un dessin de la situation pour déterminer sous quelles conditions ce qui est demandé est possible.)

Question 42
Nous avons montré en classe que $(x^n)' = nx^{n-1}$ était valide lorsque n est un entier naturel.

a) En utilisant la formule de la dérivée du quotient, montrer que cette formule est valide lorsque n est négatif (donc si $n = -k$ avec k positif.)

b) En utilisant la dérivée implicite, montrer que cette formule est valide lorsque n est une fraction du type $\frac{1}{k}$, avec k naturel.

c) Montrer ensuite à l'aide de la dérivée d'une fonction composée que la formule est valide lorsque n est une fraction $\frac{a}{b}$.

Question 43
Démontrer que

$$(x^n)' = nx^{x-1}$$

en utilisant la formule généralisée du produit de n fonctions

$$(u_1 \cdots u_n)' = u_1' u_2 \cdots u_n + u_1 u_2' u_3 \cdots u_n + \cdots + u_1 \cdots u_{n-1} u_n'.$$

Solutions

Question 1

a) 7

b) $2at + b$

c) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

d) $\dfrac{-2x+2}{3x^3}$

e) -4

Question 2

a) $\dfrac{dy}{dx} = 9x^8$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \frac{-12}{x^{13}}$

c) $f'(x) = \dfrac{7}{4}x^{\frac{3}{4}}$

d) $y' = \dfrac{-3}{x^4}$

e) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-6}{x^7}$

f) $f'(x) = \dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$

g) $g'(t) = \dfrac{-1}{2\sqrt{t^3}}$

h) $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$

i) $f'(x) = \dfrac{-1}{3\sqrt[3]{x^4}}$

j) $x'(t) = \dfrac{3}{7}\dfrac{-5}{3}t^{-8/3} = \dfrac{-5}{7\sqrt[3]{t^8}}$

Question 3

a) $f'(x) = 0$

b) $v'(t) = 1$

c) $h'(x) = 15x^2$

d) $x'(t) = \dfrac{3}{4}$

e) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{9}{20\sqrt[4]{x^5}}$

f) $x'(r) = -\dfrac{5}{8r^2}$

g) $f'(x) = 24x^2 - 8x + 9$

h) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-8}{3\sqrt[3]{x^5}} - 35x^6 - \dfrac{1}{2x^4}$

i) $f'(x) = 12x^2 + 2x - 12$

j) $\dfrac{dy}{dx} = -30x^2\left(2 - x^3\right)$

k) $f'(x) = 81x^2 + 54x + 9$

l) $g'(t) = -12t^2 - 12 - \dfrac{24}{t^3}$

Question 4

a) 3

b) -4

c) $\dfrac{14}{15}$

d) $\dfrac{3k^2}{2} - 2$

Question 5

a) $x = \dfrac{2}{3}$

b) $x = -2$ et $x = 1$

c) $x = -1$ et $x = 1$

Question 6

a) $y = -4x - 4$

b) $y = 3x - 2$

c) $y = -x + 2$

d) $y = -\frac{x}{9} + \frac{2}{3}$

e) $y = -\frac{x}{9} + \frac{2}{3}$

f) $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$

g) $y = \frac{x}{4} + 1$

Question 7

$f'(x) = 0 \iff -2(x+1) = 0 \iff x = -1$. Le point cherché est donc $(-1, 4)$.

Question 8

$x = -2$

Question 9

$x = -\dfrac{2}{3}$ et $x = \dfrac{2}{3}$

Question 10

a) $50\,\mathrm{m}$

b) $15\,\mathrm{m/s}$

c) $\sqrt{29}\,\mathrm{m/s} \approx 5{,}39\,\mathrm{m/s}$

d) $61{,}48\,\mathrm{m}$

e) environ $34{,}71\,\mathrm{m/s}$

f) $h''(t) = -9.8\,\mathrm{m/s^2}$

Question 11

La dérivée est $6x^2 - 2x$

Question 12

a) $\dfrac{dy}{dx} = (2)(5x+1) + (2x-1)(5) = 20x - 3$

b) $\dfrac{dy}{dx} = (3)(2 - 5x^3) + (3x+1)(-15x^2) = -60x^3 - 15x^2 + 6$

c) $x'(t) = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{t}} - 1\right)\left(4t^3 - 2t^2 + 5\right) + \left(\sqrt{t} - t\right)\left(12t^2 - 4t\right) = 14\sqrt{t^5} - 5\sqrt{t^3} + \dfrac{5}{2\sqrt{t}} - 16t^3 + 6t^2 - 5.$

d) $\dfrac{dy}{dx} = (1)(3x-1) + x(3) + (2)(4 - 3x^2) + (2x - 5)(-6x) = 18x^2 - 24x - 9$

e) $f'(x) = (2x+1)(3x+1) + (x+1)(2)(3x+1) + (x+1)(2x+1)(3) = 18x^2 + 22x + 6$

f) $f'(x) = 3x^2\left(5x^2-4\right)\left(3-x^4\right) + x^3(10x)\left(3-x^4\right) + x^3\left(5x^2-4\right)\left(-4x^3\right) = -45x^8 + 28x^6 + 75x^4 - 36x^2$

Question 13

a) $y' = \dfrac{2x(x^2+1) - x^2(2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$.

b) $f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}$.

c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{8x^3}{(x^4+1)^2}$.

d) $d'(t) = \dfrac{4t\left(4t^3 - 15t + 10\right)}{(5-4t^3)^2}$.

e) $f'(x) = \dfrac{1+x}{2\sqrt{x}(1-x)^2}$.

Question 14

a) $f'(x) = \dfrac{3x^2-3}{\pi}$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{34x-17}{3(x^2-x+6)^2}$

c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-8(x+2)}{3\sqrt[3]{(x^2+4x+2)^4}}$

Question 15

a) $f'(0) = \dfrac{9}{2}$

b) $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=1} = -13$

c) $f'(-1) = -\dfrac{110}{64}$

Question 16

a) 40mm^2

b) $6\ \text{mm}^2$

c) $S(x) = -\dfrac{544x^3}{(1-4x^4)^2}$

Question 17

$$\begin{aligned}(uvw)' &= ((uv)w)' \\ &= (uv)'w + (uv)w' \\ &= (u'v + uv')w + (uv)w' \\ &= u'vw + uv'w + uvw'\end{aligned}$$

Question 18

Il faut montrer que la dérivée de f est différente de 1 pour toute valeur de x. On cherche donc à montrer que

$$f'(x) = 1$$

n'a aucune solution. On trouve en dérivant que $f'(x) = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$. L'équation à résoudre est donc

$$\frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 1.$$

$$\begin{aligned}x(x-2) &= (x-1)^2 \\ x^2 - 2x &= x^2 - 2x + 1 \\ 0 &= 1\end{aligned}$$

qui n'a pas de solution. Il n'y a donc aucune valeur de x telle que la pente de la tangente $f'(x)$ soit 1.

Question 19

Indice : considérez une droite de paramètres indéterminés a et b. Trouver les valeurs des paramètres nécessaires pour que la droite passe par le point voulu. Chercher ce qui doit se produire au point de tangence pour que la droite soit tangente à la courbe.

Les équations des deux droites sont $y = 4x + 4$ et $y = -4x + 36$.

Question 20

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-nx^{n-1}}{(x^n-1)^2}$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{x+2}{x^3} = -\dfrac{2x^2+5x-2}{x^3(x+1)^2}$

c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^4 - 50x^3 + 24x - 80}{2\sqrt{x}(x^3-8)^2}$

d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt[4]{x^3}\left(28x^2 + 41x - 7\right)}{4(x+1)^2}$

Question 21

a) $f'(t) = 5\left(3x^2 - x + 1\right)^4(6x-1)$

b) $f'(t) = 99(2x+1)^{98}(2) = 198(2x+1)^{98}$

c) $g'(t) = -200t^3\left(1-5t^4\right)^9$

d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{7}{2}\left(5x^2 - 3x + 2\right)^{\frac{5}{2}}(10x-3)$

e) $f'(x) = \dfrac{5x^4}{2\sqrt{x^5+1}}$

f) $g'(x) = -\dfrac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}$

g) $x'(t) = \dfrac{m}{2(1+t)^2}\sqrt{\dfrac{1+t}{mt}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{m}{t(1+t)^3}}$

h) $f'(x) = \dfrac{-5}{3\sqrt[3]{(8-x)^2}}$

Question 22

a) $\dfrac{dx}{dt} = 12t - 5$ et $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=2} = 19$

b) $\dfrac{dz}{dy} = -\dfrac{1}{y^2}$ et $\left.\dfrac{dz}{dy}\right|_{y=-3} = -\dfrac{1}{9}$

c) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{12t-5}{2\sqrt{6t^2-5t}}$ et $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=-1} = -\dfrac{17}{2\sqrt{11}}$

d) $\dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$ et $\left.\dfrac{dz}{dx}\right|_{x=\frac{1}{9}} = -\dfrac{27}{2}$

Question 23

a) $\dfrac{dm}{dt} = \dfrac{dm}{dL}\dfrac{dL}{dt} = 8L(0{,}3 - 0{,}2L)$

b) Au moment où la masse du poisson est de 4 kg, celle-ci augmente à un taux de 0,8 kg/an.

Question 24

a) $\dfrac{dy}{dx} = 5\left[\left(x^3+2x\right)^4 + 3x\right]^4\left(4\left(x^3+2x\right)^3\left(3x^2+2\right) + 3\right)$

b) $\dfrac{dy}{dx} = 6(3x+4)^{13}\left(x^2-2\right)^{17}\left(25x^2 + 24x - 14\right)$

c) $f'(t) = \left(6 - 20t - \dfrac{5\pi}{2}\right)\sqrt{\dfrac{2t+\pi}{2-5t}}$

d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\left(2x^3+1\right)^2\left(34x^3 + 108x^2 - 1\right)}{2\sqrt{(x+3)^3}}$

e) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 + \sqrt{3x+1}}}\left(2x + \dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}}\right)$

Question 25

(b) et (d)

Question 26

a) $-\frac{1}{2y}$

b) $-\frac{x^2}{y^2}$

c) $-\frac{y}{x}$

d) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{4t\sqrt{x^2+t^2} - t}{x}$

e) $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{30y^2}{3x^2 - 10x}$

f) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(2y+3)^2}{9-6y-2y^2}$ ou $\dfrac{2y+3}{3-2x-2y}$

g) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6 - 2xy^2 - 3x^2y}{2x^2y + x^3}$

Question 27

$y = -x + 2$

Question 28

Laissé à l'étudiant. Utiliser le fait que le produit des pentes doit être de -1.

Question 29

$\sqrt{3}$

Question 30

a) $f^{(4)}(x) = 120x$

b) $y^{(9)} = 0$

c) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 30x\left(x^3+1\right)^3\left(7x^3+1\right)$

d) $f''(1) = -4$

e) $\left.\dfrac{d^3y}{dx^3}\right|_{x=4} = \dfrac{105}{4}$

f) $f^{(5)}(x) = -\dfrac{15120}{x^{10}}$

Question 31

a) $f'(x) = 6x^5$

b) $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^4}}$

c) $f'(x) = \dfrac{3\sqrt{x}}{2}$

d) $f'(x) = 24x^2 - 8x + 9$

e) $f'(x) = -32x^7 - \dfrac{2}{5x^3}$

f) $f'(x) = \dfrac{1}{6\sqrt{x}} - 4x^3 + \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$

g) $f'(x) = 3(-4x^3 + x^2 + 4)$

h) $f'(x) = -20x^3 - \dfrac{35\sqrt{x^5}}{2} + 4x + 3\sqrt{x} + \dfrac{9}{2\sqrt{x}} + 9$

i) $f'(x) = -5x(49x^5 - 7x^3 - 20x^2 + 2)$

j) $f'(x) = 2(13x - 19)$

k) $f'(x) = \dfrac{-3}{(x-1)^2}$

l) $f'(x) = \dfrac{-6}{x^2} + 2x - 1$

m) $f'(x) = \dfrac{2x(2x^4 - 5x^2 + 6}{(x^4 - 3)^2}$

n) $f'(x) = \dfrac{x+2}{2\sqrt{x}(x-2)^2}$

o) $f'(x) = \dfrac{x^3 - 8x^2 - 20x - 16}{x^3(x+2)^2}$

p) $f'(x) = \dfrac{x^3 - 18x^2 + 12x - 24}{2\sqrt{x}(x^2-4)^2}$

Question 32

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-21}{16x^{\frac{7}{4}}} - x^{\frac{3}{2}}$

b) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{\sqrt{x^3}} - \dfrac{2}{\sqrt[3]{x^4}} + \dfrac{1}{40\sqrt[5]{x^4}}$

c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4x - 2}{(x^3+2)^2}$

d) $\dfrac{dy}{dx} = 21x^2\left(x^3 - 1\right)^6$

e) $\dfrac{dy}{dx} = 2x + \dfrac{3}{2\sqrt{3x-1}}$

f) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{15x^2 - 4x}{2\sqrt{3x-1}}$

g) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\sqrt{x}+2}{2x^2}$

h) $\dfrac{dy}{dx} = (2-x)^4(-42x-1)$

i) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{20x+25}{3\sqrt[3]{(2x^2+5x+7)^2}}$

j) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-112x}{(x^2-4)^2}$

Question 33

Oui, au point $(3, -5)$.

Question 34

$a = \dfrac{71}{32}$ ou $a = \dfrac{73}{32}$.

Question 35

a) 80 m

b) 6 m/s (21,6 km/h)

c) 43,27 m

d) 10 s

e) 14 m/s (50,4 km/h)

f) 1 m/s² (12,96 km/h²)

Question 36

a) $\dfrac{dy}{dx} = 2x\left(x^2+3\right)^3\left(2x^3-5\right)^2\left(17x^3+27x-20\right)$

b) $\dfrac{dy}{dx} = 18\left[\left(x^2-5\right)^8 + x^7\right]^{17}\left(16x\left(x^2-5\right)^7 + 7x^6\right)$

c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{15x-45}{2\sqrt{x-1}}$

d) $\dfrac{dy}{dx} = \left(x^3+2\right)^4\left(17x^4+4x\right) + \dfrac{64x^7}{(x^8-5)}$

e) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{15}{(4x+1)^2}$

f) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x^2+1}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$

g) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x^3\left(10x^2 - x - 10\right)}{5\sqrt[5]{(x+1)^4(x-1)^6}}$

h) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x-4}{3\sqrt[3]{x^7(1-x)}}$

Question 37

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x+3y}{2y-3x}$

b) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{6x^3+5}{15y^2+9x^2y^2}$

c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2+3x^2y^3}{x^2-3x^3y^2}$ ou $\dfrac{1+6xy^2}{1-6x^2y}$

d) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$

Question 38

a) $-\dfrac{2}{9}$

b) 2

Question 39

Laissé à l'étudiant. Indice : transformer le quotient $f(x)/g(x)$ en produit $f(x)\frac{1}{g(x)}$.

Question 40

a) Dériver deux fois à l'aide de la formule du produit.

b) Dériver le résultat précédant à l'aide de la formule du produit.

c) Si vous n'y arrivez pas facilement, commencer par calculer $\dfrac{d^4}{dx^4}(uv)$.