1 Analyse de fonctions

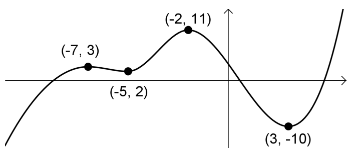
1.1 Croissance et extremums locaux

Question 1
À l'aide d'un tableau de signe, étudier le signe de la fonction

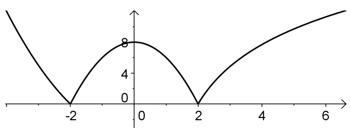
$$f(x) = \frac{(x+1)^2(x+2)^3(x+3)^4}{(x-3)^5}.$$

Question 2
Connaissant le graphique de f, construire le tableau de signe de f' et esquisser un graphique pour f'

a)



b)



Question 3
Soit la fonction $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$.

a) $f(x)$ est-elle positive en $x = 2$?

b) f est-elle croissante dans le voisinage de $x = 2$?

c) f est-elle croissante dans le voisinage de $x = 5$?

d) f est-elle croissante sur l'intervalle $[1, 6]$?

Question 4
Pour chacune des fonctions suivantes, trouver les intervalles de croissance, les intervalles de décroissance et les extremums locaux.

a) $y = 4x^3 - x + 4$

b) $y = 2x^4$

c) $y = \dfrac{x+2}{3x-1}$

d) $y = \sqrt{2x-1}$

e) $y = x^3 - 18x^2 + 105x + 41$

f) $y = \dfrac{x}{x^2+16}$

g) $y = 3x^5 - 25x^3 + 60x - 1$

h) $y = (x-2)^2(x-3)$

i) $y = \sqrt[3]{x-3}$

j) $y = \dfrac{x^2+8}{x-1}$

k) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+2}$

l) $y = (2x-3)^{2/3}$

Question 5
Montrer, en utilisant le calcul différentiel, que le sommet d'une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ se situe à

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Question 6
Trouver la valeur de x pour laquelle la croissance de la fonction

$$y = \frac{1}{1+x^2}$$

est la plus rapide.

1.2 Concavité et points d'inflexion

Question 7
Esquisser le graphe d'une fonction ayant les propriétés données.

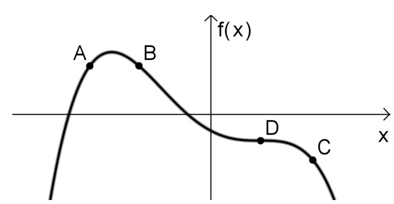
a) f est concave vers le haut et croissante sur $\mathbb{R}$.

b) f est concave vers le bas et croissante sur $\mathbb{R}$.

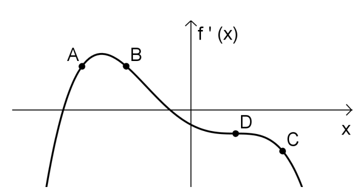
c) f est concave vers le haut et décroissante sur $\mathbb{R}$.

d) f est concave vers le bas et décroissante sur $\mathbb{R}$.

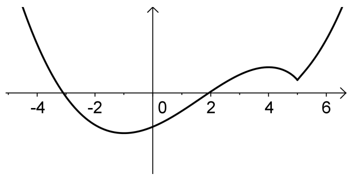
Question 8
En se référant au graphique de $y = f(x)$ ci-dessous, déterminer les signes de $\frac{dy}{dx}$ et de $\frac{d^2y}{dx^2}$ aux points A, B, C et D.



Question 9
Soit la fonction $y = f(x)$. En se référant au graphique de $f'(x)$ ci-dessous, déterminer les signes de $\dfrac{dy}{dx}$ et de $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ aux points A, B, C et D.

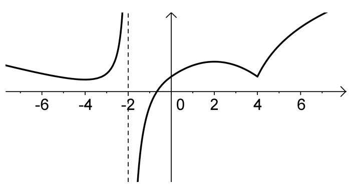


Question 10
Répondre aux questions suivantes selon le graphique de $y = f(x)$ ci-dessous.



a) Trouver les intervalles où f est croissante.
b) Trouver les intervalles où f est décroissante.
c) Trouver les intervalles où f est concave vers le haut.
d) Trouver les intervalles où f est concave vers le bas.
e) Trouver les valeurs de x où f a un maximum relatif.
f) Trouver les valeurs de x où f a un minimum relatif.
g) Trouver les valeurs de x où f a un point d'inflexion.

Question 11
Répondre aux questions suivantes selon le graphique de $y = f(x)$ ci-dessous.



a) Trouver les intervalles où f est croissante.
b) Trouver les intervalles où f est décroissante.
c) Trouver les intervalles où f est concave vers le haut.
d) Trouver les intervalles où f est concave vers le bas.
e) Trouver les valeurs de x où f a un maximum relatif.
f) Trouver les valeurs de x où f a un minimum relatif.
g) Trouver les valeurs de x où f a un point d'inflexion.

Question 12
Étudier la concavité et trouver les points d'inflexion de chacune des fonctions suivantes.

a) $f(x) = 5 - (x-7)^4$
b) $f(x) = 2x^6 - 5x^4 + 1$
c) $f(x) = \sqrt[3]{3x+1} - 7$
d) $f(x) = 1 - (x-4)^{\frac{2}{3}}$
e) $f(x) = (1-3x)^3(2x-3)$

Question 13
Utiliser, si possible, le test de la dérivée seconde pour trouver les extremums relatifs des fonctions suivantes.

a) $y = x^2 - x + 1$
b) $y = 2x^2 - x + 8$
c) $y = x^3 - 1$
d) $y = x^3 - 15x^2 - 33x$
e) $y = x^4 - 6x^2 + 1$
f) $y = \dfrac{x^2}{x+1}$

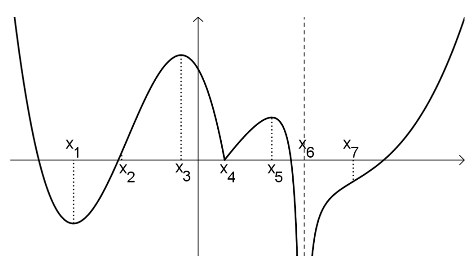
1.3 Extremums absolus

Question 14
Trouver les minimums et les maximums absolus des fonctions suivantes dans l'intervalle donné.

a) $y = 5x^2 + 8x - 4$ sur $[1, 3]$
b) $y = \sqrt{x^2 - 1}$ sur $[2, 4]$
c) $y = \dfrac{x^2}{1-x}$ sur $[0, 3]$
d) $y = 3x^4 + 16x^3 + 6x^2 - 72x + 1$ sur $[-4, 4]$
e) $y = \dfrac{4-x}{6x+1}$ sur $[0, 3]$
f) $y = \dfrac{x-3}{2x-1}$ sur $[-1, 1]$
g) $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 7$ sur $[-4, 4]$
h) $y = \dfrac{2x^2+x+8}{x}$ sur $[-1, 3]$
i) $y = (x-2)^2(x-3)$ sur $[-2, 5]$
j) $y = \dfrac{x^2+8}{x-1}$ sur $[0, \infty[$
k) $y = (2x-3)^{2/3}$ sur $\mathbb{R}$
l) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$ sur $[3, \infty[$

1.4 Exercices récapitulatifs

Question 15
Répondre aux questions suivante sur le graphique de la fonction f donné ci-dessous.



a) Trouver les valeurs de x où f a un minimum relatif.
b) Trouver les valeurs de x où f a un maximum relatif.
c) Trouver les valeurs de x où f a un point d'inflexion.

d) Trouver les valeurs de x où f n'est pas dérivable.

e) Quel est le maximum absolu sur l'intervalle $[0, x_6[$?

f) Quel est le minimum absolu sur l'intervalle $[x_2, x_5]$?

g) Quels sont les extremums absolus sur l'intervalle $[x_1, x_7]$?

Question 16
Sur quel(s) intervalle(s) les fonction suivantes sont-elles croissante ?

a) $y = 2x^3+3x^2-36x+1$

b) $y = \dfrac{2x^2+x+8}{x}$

c) $y = \dfrac{8-7x}{x^2-1}$

Question 17
Sur quel(s) intervalle(s) la fonction donnée est-elle concave vers le bas ?

a) $f(x) = (1-4x)^3$

b) $f(x) = (x-1)^2(x+1)^2$

c) $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$

Question 18
Faire l'étude complète de chaque fonction et tracer une esquisse de son graphique respectant son domaine, ses asymptotes, ses intervalles de croissance et de concavité, ses extremums et ses points d'inflexion.

a) $f(x) = \dfrac{x^2-2x-8}{x^2}$

b) $y = x^4-4x^3+4x^2-1$

c) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x-6)^{\frac{1}{3}}$

d) $f(x) = \dfrac{4x^2-3x+3}{x-1}$

e) $f(x) = (x-1)^3(x+3)^2$

Question 19
Utiliser, si possible, le test de la dérivée seconde pour trouver les extremums relatifs des fonctions suivantes.

a) $y = x^3-6x^2-63x$

b) $y = \dfrac{x^2+8}{x-1}$

c) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+2}$

Question 20
Trouver les minimums et les maximums absolus des fonctions suivantes dans l'intervalle donné.

a) $y = x^3-18x^2+105x+41$ sur $[4, 8]$

b) $y = x^4-2x^2+2$ sur $[-2, 2]$

c) $y = \dfrac{x}{x^2+16}$ sur $[1, \infty[$

Question 21
Vrai ou faux. Trouver un contre-exemple si l'énoncé est faux.

a) Si f et g sont croissantes sur un intervalle, alors $f+g$ l'est également.

b) Si f et g sont croissantes sur un intervalle, alors $f \cdot g$ l'est également.

c) Si f et g sont concaves vers le haut sur un intervalle, alors $f+g$ l'est également.

d) Si f et g sont concaves vers le haut sur un intervalle, alors $f \cdot g$ l'est également.

Solutions

Croissance et extremums locaux

Question 1

x	$-\infty$		-3		-2		-1		3		∞
f		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	$\nexists$	$+$	

Question 2

a) graphs/ch45_gr1.png

b) graphs/ch44_gr1.png

Question 3

a) Oui b) Non c) Oui d) Non

Question 4

a) Croissante sur $\left]-\infty, -\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right]$ et sur $\left[\dfrac{1}{2\sqrt{3}}, \infty\right[$, décroissante sur $\left[-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}, \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right]$, maximum local en $\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}, \dfrac{36+\sqrt{3}}{9}\right)$, minimum local en $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}}, \dfrac{36-\sqrt{3}}{9}\right)$

b) Croissante sur $[0, \infty[$, décroissante sur $]-\infty, 0]$, minimum local en $(0, 0)$.

c) Croissante sur $\left]-\infty, \frac{1}{3}\right[$, décroissante sur $\left]\frac{1}{3}, infty\right[$, aucun extremum local.

d) Croissante sur $[\frac{1}{2}, \infty[$, minimum local en $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$

e) Croissante sur $]-\infty, 5]$ et sur $[7, \infty[$, décroissante sur $[5, 7]$, maximum local en $(5, 241)$, minimum local en $(7, 237)$.

f) Croissante sur $]-4, 4]$, décroissante sur $]-\infty, -4[$ et sur $]4, \infty]$, maximum local en $(4, 1/8)$, minimum local en $(-4,\ -1/8)$.

g) Croissante sur $-\infty, -2]$, sur $[-1, 1]$ et sur

$[2, \infty[$, décroissante sur $[-2, -1]$ et sur $[1, 2]$, maximums locals en $(-2, -17)$ et en $(1, 37)$, minimums locals en $(-1, -39)$ et en $(2, 15)$.

h) Croissante sur $]-\infty, 2]$ et sur $(8/3, \infty)$, décroissante sur $[2, 8/3]$, maximum local en $(2, 0)$, minimum local en $(8/3, -4/27)$.

i) Croissante sur $\mathbb{R}$, aucun extremum local.

j) Croissante sur $]-\infty, -2$ et sur $[4, \infty[$, décroissante sur $[-2, 0[$ et sur $]0, 4]$, maximum local en $(-2, -4)$, minimum local en $(4, 8)$.

k) Croissante sur $[0, \infty[$, décroissante sur $]-\infty, 0]$, minimum local en $(0, -1/2)$

l) Croissante sur $[3/2, \infty[$, décroissante sur $]-\infty, 3/2]$, minimum local en $(3/2, 0)$.

Question 5

Au sommet, on doit avoir que $y' = 0$. $y' = 2ax + b$, et donc $y' = 0$ quand $x = -b/2a$.

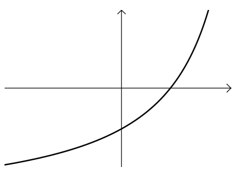
Question 6

La croissance de y est la plus rapide quand la dérivée est maximum, donc quand la dérivée de la dérivée, c'est à dire y'', est nulle. On calcule donc la dérivée seconde de y et on détermine pour quelle valeur de x on a que $y'' = 0$. La valeur cherchée est $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

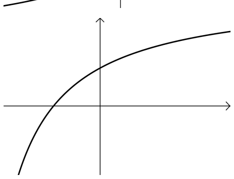
Concavité et points d'inflexion

Question 7

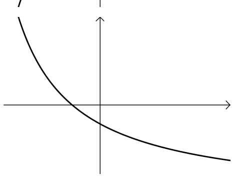
a)



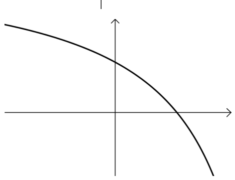
b)



c)



d)



Question 8

	A	B	C	D
$\frac{dy}{dx}$	+	-	-	0
$\frac{d^2y}{dx^2}$	-	-	+	0

Question 9

	A	B	C	D
$\frac{dy}{dx}$	+	+	-	-
$\frac{d^2y}{dx^2}$	+	-	-	0

Question 10

a) $[-1, 4]$, et $[5, \infty[$

b) $]-\infty, -1]$ et $[4, 5]$

c) $]-\infty, 2[$ et $[5, \infty[$

d) $]2, 4]$

e) $x = 4$

f) $x = 1$ et $x = 5$

g) $x = 2$

Question 11

a) $[-4, -2[$, $]-2, 2[$ et $[4, \infty[$

b) $]-\infty, -4]$ et $[2, 4]$

c) $]-\infty, -2[$

d) $]-2, 4]$ et $[4, \infty[$

e) $x = 2$

f) $x = -4$ et $x = 4$

g) Aucun point d'inflexion

Question 12

a) Concave vers le bas sur $\mathbb{R}$, aucun point d'inflexion.

b) Concave vers le haut sur $]-\infty, -1]$ et sur $[1, \infty[$, concave vers le bas sur$[-1, 1]$, points d'inflexion en $(-1, -2)$ et $(1, -2)$

c) Concave vers le haut sur $]-\infty, -1/3]$, concave vers le bas sur $[-1/3, \infty[$, point d'inflexion en $(-1/3, -7)$

d) Concave vers le haut sur $]-\infty, 4]$ et sur $[4, \infty[$, aucun point d'inflexion.++

e) Concave vers le haut sur $[1/3, 11/12]$, concave vers le bas sur $]-\infty, 1/3]$ et sur $[11/12, \infty[$, points d'inflexion en $(1/3, 0)$ et $(11/12, 25/4)$

Question 13

a) Minimum relatif en $(1/2, 3/4)$.

b) Minimum relatif en $(1/4, 63/8)$.

c) Aucun extremum relatif.

d) Minimum relatif en $(11, -847)$, maximum relatif en $(-1, 17)$

e) Minimums relatifs en $(-\sqrt{3}, -8)$ et $(\sqrt{3}, -8)$, maximum relatif en $(0, 1)$

f) Minimum relatif en $(0, 0)$, maximum relatif en $(-2, -4)$

Question 14

a) Minimum = 9, maximum = 65.

b) Minimum = $\sqrt{3}$, maximum = $\sqrt{15}$.

c) Aucun extremum.

d) Minimum = -46, maximum = 1601.

e) Minimum = 1/19, maximum = 4.

f) Aucun extremum.

g) Minimum = -37, maximum = 88.

h) Aucun extremum.

i) Minimum = -80, maximum = 18.

j) Minimum = 8, aucun maximum.

k) Minimum = 0, aucun maximum.

l) Maximum = 1, aucun minimum.

Question 15

a) x_1 et x_4.

b) x_3 et x_5.

c) x_2 et x_7.

d) x_4 et x_6.

e) $f(0)$

f) $f(x_4)$

g) Aucun, minimum absolu, max = $f(x_3)$.

Question 16

a) Croissante sur $]-\infty, -3]$ et sur $[2, \infty[$, décroissante sur $[-3, 2]$, maximum relatif en $(-3, 92)$, minimum relatif en $(2, -33)$.

b) Croissante sur $]-\infty, -2]$ et sur $[2, \infty[$, décroissante sur $[-2, 0[$ et sur $]0, 2]$, maximum relatif en $(-2,\ -7)$, minimum relatif en $(2, 9)$.

c) Croissante sur $]-\infty, -1[$, sur $]-1; 0, 59]$ et sur $[1, 70; \infty[$, décroissante sur $[0, 59; 1[$ et sur $]1, 1, 70]$, maximum relatif en $(0, 59; -5, 94)$, minimum relatif en $(1, 70;\ -2, 06)$.

Question 17

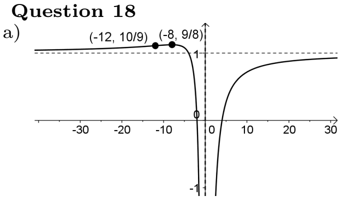
a) $[1/4,\ \infty[$

b) $[-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3]$

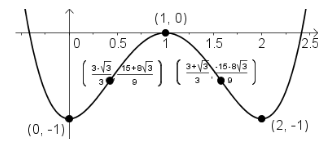
c) $[0, \sqrt{2}]$

Question 18

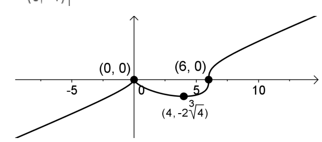
a)



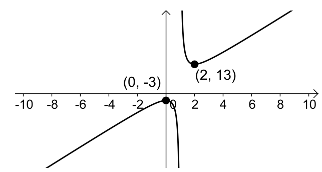
b)



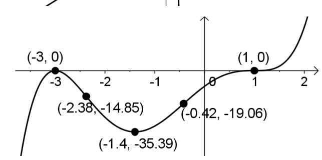
c)



d)



e)



Question 19

a) Minimum relatif en $(7, -392)$, maximum relatif en $(-3, 108)$

b) Minimum relatif en $(4, 8)$, maximum relatif en $(-2, -4)$

c) Minimum relatif en $(0, -1/2)$.

Question 20

a) Min = 237, max = 241.

b) Min = 1, max = 10

c) Max = 1/8, aucun min.

Question 21

a) Vrai

b) Faux, on peut prendre $f(x) = x$ et $g(x) = x$, toutes deux croissantes sur $\mathbb{R}$, mais telles que $f(x) \cdot g(x) = x^2$ ne l'est pas.

c) Vrai

d) Faux, on peut prendre $f(x) = \frac{1}{x^2}$ et $g(x) = x^2 - 1$, toutes deux concaves vers le haut sur $\mathbb{R}$, mais $f \cdot g(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ ne l'est pas.