Dérivée de fonctions transcendantes

Fonctions exponentielles et logarithmiques

Question 1
Évaluer et simplifier.

a) $\log_{10}(1000)$
b) $\log_{100}(10)$
c) $\log_2(8)$
d) $\log_3\left(\frac{1}{9}\right)$
e) $\log_3\left(\sqrt[4]{9}\right)$
f) $\log_2\left(\sqrt{2^5}\right)$
g) $\log_3(54)$
(ind. $\log_3(2) \approx 0,63$)
h) e^0
i) e^1
j) $\ln(1)$
k) $\ln\left(e^3\right)$
l) $\ln\left(\sqrt{e}\right)$
m) $\ln(e)$
n) $\log_2\left(\left(2^{11}\right)^9\right)$
o) $\log_2\left(\frac{5}{2}\right) - \log_2\left(\frac{10}{2}\right)$

Question 2
Résoudre les équations suivantes.

a) $\log_2(x) = 5$
b) $\log_3(x) = 4$
c) $\log_5(x) = \dfrac{1}{2}$
d) $\log_{10}(x) = 3$
e) $\ln(x) = 0$
f) $\ln(x) = 1$
g) $\ln(x) = 10$
h) $3^x = 100$
i) $5 \cdot 3^x = 2^{x+1}$
j) $2\log_4(x) - \log_4(x-1) = 1$

Question 3
Évaluer les limites suivantes.

a) $\lim_{x\to 0^+} \ln(x)$
b) $\lim_{x\to 1^+} \ln(x-1)$
c) $\lim_{x\to 1^-} \ln(x-1)$
d) $\lim_{x\to 1^+} \ln(x)$
e) $\lim_{x\to 2^+} \ln(x-1)$
f) $\lim_{x\to \infty} \ln(x+2)$
g) $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{1}{\ln(x)}$

Question 4
Évaluer les limites suivantes.

a) $\lim_{x\to 0} e^x$
b) $\lim_{x\to 2} e^x$
c) $\lim_{x\to 2} e^{x-1}$
d) $\lim_{x\to \frac{1}{2}} e^x$
e) $\lim_{x\to \infty} e^x$
f) $\lim_{x\to \infty} -e^x$
g) $\lim_{x\to \infty} e^{-x}$
h) $\lim_{x\to \infty} -e^{-x}$
i) $\lim_{x\to \infty} e^{x-1}$

Question 5
Évaluer les limites suivantes

a) $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$
b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{2^x}$
c) $\lim_{x\to\infty} 2^{-x}$
d) $\lim_{x\to-\infty} 2^x$
e) $\lim_{x\to-\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$
f) $\lim_{x\to\infty} e^{1/x}$
g) $\lim_{x\to\infty} \log_{1/3}(x)$
h) $\lim_{x\to 2} \log_2\left(x^2 - 3x + 2\right)$
i) $\lim_{x\to 4^+} \dfrac{5}{\log_3(x-4)}$
j) $\lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt{x} + \ln(-x)\right)$

Question 6
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $f(x) = e^{2x}$
b) $f(x) = 3^{2x}$
c) $y = \dfrac{e^{2x}}{4}$
d) $y = e^{x^2+3x+4}$
e) $f(x) = \ln\left(x^2\right)$
f) $f(x) = \log_2\left(x^2\right)$
g) $y = \ln\left(x^2 + 3x + 4\right)$
h) $y = 3^x + 3^{-x} + x^3 + 3x$
i) $y = 8^{2^x + x^2}$
j) $y = \dfrac{x^3}{e^x}$
k) $y = x \cdot 8^x$

Question 7
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $y = \log_5\left(x^3 + 1\right)$
b) $y = \dfrac{\ln(x)}{x}$
c) $y = x^4\left(\ln(x)\right)^5$
d) $y = \sqrt{\log_3(x)}$

Question 8
Trouver $\dfrac{dy}{dx}$ pour chacune des relations suivantes.

a) $e^{x+y} = y^2 + 1$
b) $x\ln(y) - 3xy^2 = 0$

Question 9
Soit la fonction $f(x) = e^{-x^2}$.

a) Faire l'étude complète de croissance, concavité et asymptotes de cette fonction puis tracer son graphique.
b) Trouver les dimensions du rectangle d'aire maximale que l'on peut inscrire entre l'axe des x et la courbe de f.

Question 10
Soit $f(x) = x^k - k^x$, où k est une constante positive. Trouver la valeur de k pour laquelle $f'(1) = 0$.

Question 11
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $y = e^{\sqrt{x}} + \sqrt{e^x}$

b) $y = e^{\frac{x^2}{x-5}}$

c) $y = 2^{3^{5^x}}$

d) $y = \ln(x)\log(x)$

e) $y = \dfrac{\ln x^4}{x^4}$

f) $y = \left(x + \ln^2(x)\right)^5$

Fonctions trigonométriques

Question 12
Évaluer et simplifier les expressions suivantes.

a) $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

b) $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

c) $\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

d) $\sec\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

e) $\operatorname{cosec}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

f) $\operatorname{cotan}\left(\frac{-2\pi}{3}\right)$

Question 13
Évaluer les expressions suivantes.

a) $\sin\left(\frac{8\pi}{3}\right)$

b) $\cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right)$

c) $\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

d) $\cot\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$

e) $\sec\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

f) $\csc\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

g) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$

h) $\cos\frac{\pi}{12}$

Question 14
Démontrer les identités trigonométriques suivantes

a) $\sin(-x) = -\sin(x)$

b) $\cos(-x) = \cos(x)$

c) $\sin(x) = -\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

d) $\cos(x) = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

e) $\sin^2(\theta) = \dfrac{1-\cos(2\theta)}{2}$

f) $\sin(3\theta) = 3\sin(\theta) - 4\sin^3(\theta)$

g) $\sin^4(\theta) - \cos^4(\theta) = \cos(2\theta)$

h) $\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right) + \dfrac{\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)}$

Question 15
Démontrer que $(\cos(x))' = -\sin(x)$

a) En utilisant la définition de la dérivée.

b) En utilisant l'identité $\cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)}$.

c) En utilisant les identités $\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ et $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Question 16
Démontrer les formules de dérivation suivantes à l'aide des formules de dérivation des fonctions $\sin(x)$ et $\cos(x)$ et des propriétés de la dérivée.

a) $\left(\cot(x)\right)' = -\csc^2(x)$

b) $\left(\csc(x)\right)' = -\csc(x)\cot(x)$

Question 17
Évaluer les limites suivantes

a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \sin\left(\frac{x}{2}\right)$

b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x$

c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2^x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} 2^{-x}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 2^x$

f) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x$

g) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{1/x}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \log_{1/3}(x)$

i) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \log_2\left(x^2 - 3x + 2\right)$

j) $\displaystyle\lim_{x\to 4^+} \frac{5}{\log_3(x-4)}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt{x} + \ln(-x)\right)$

Question 18
Évaluer les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \log(x-2)$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \log(x-2)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \log(x-2)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \ln\left(x^2 - 2x + 1\right)$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \ln\left(x^2 - 6x + 9\right)$

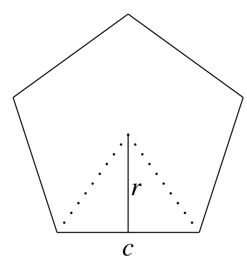
Question 19
Trouver les asymptotes des fonctions suivantes.

a) $y = \log\left(x^2 - 1\right)$

b) $y = \ln\left(\dfrac{x-2}{x-3}\right)$

c) $f(x) = \begin{cases} e^x + 4 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^3-1}{x+2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Question 20
Un polygone régulier à n côtés est une figure formée de n côtés et angles congrus (carré, pentagone régulier, hexagone régulier, etc.). Plus le nombre de côtés augmente, plus le polygone ressemble à un cercle. On peut dire qu'un cercle est la limite d'un polygone régulier lorsque le nombre n de côtés tend vers l'infini. Le rayon de ce cercle correspondra alors à l'apotème r illustrée dans la figure.



a) Trouver l'aire d'un polygone régulier à n côtés en fonction de r et de c.

b) Exprimer c en fonction de n (vous aurez besoin de trigonométrie ici).

c) Utiliser les deux résultats pour trouver une formule générale pour l'aire d'un polygone à n côtés en fonction uniquement de n et de r.

d) En déduire la formule de l'aire d'un cercle (Remarquons que r est une constante dans le processus). *Vous venez de démontrer la formule de l'aire du cercle ! Cette formule a été démontrée pour la première fois par Archimèdes (287 av. J.C. – 212 av. J.C.), mais sans utiliser le concept moderne de limite.*

Question 21
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $y = x^3 \sin(x)$
b) $y = \cos(3x) - 3\cos(x)$
c) $y = \sec^2(x)$
d) $y = \cot(3x)\csc(3x)$
e) $y = \tan\left(\dfrac{x^2}{x+1}\right)$
f) $y = e^{\sin(3x)}$

Question 22
Trouver $\dfrac{dy}{dx}$ à l'aide de la dérivation implicite.

a) $x\sin(x) + y\cos(y) = 0$
b) $\sin^4(xy) + xy = 0$
c) $\sec\left(y^3\right) + y^2 = 3x^4$
d) $x\tan(e^y) + \ln y = 3$

Question 23
Étudier la croissance et la concavité des fonctions suivantes et tracer leur graphique.

a) $f(x) = \dfrac{x}{2} + \sin(x)$, où $x \in [0,\ 2\pi]$
b) $f(x) = \sin x + \cos(x)$, où $x \in [0,\ 2\pi]$

Question 24
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $y = \cos(\mathrm{e}^{-x})$
b) $y = \sin^3(x) + 3^{\sin(x)}$
c) $y = \ln(\sec(x) + \tan(x))$
d) $y = \dfrac{1+\csc(x^2)}{1-\cot(x^2)}$
e) $y = \cos\left(\tan(x^2)\right)$
f) $y = \mathrm{e}^{x^3}\sec^2(2x)$
g) $y = \mathrm{e}^{\tan(x)} - \sin(x)\cos(x)$
h) $y = \cot\left(\dfrac{x-1}{x-4}\right)$

Fonctions trigonométriques inverses

Question 25
Évaluer et simplifier.

a) $\sin(\arcsin(1/2))$
b) $\arccos(\cos(\pi/7))$
c) $\arcsin(\sin(7\pi/5))$
d) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
e) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$
f) $\arctan(-1)$
g) $\arctan\left(\sqrt{3}\right)$

Question 26
Sans calculatrice, évaluer les nombres suivants en radians.

a) $\arcsin\left(\dfrac{1}{2}\right)$
b) $\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)$
c) $\arctan(-1)$
d) $\mathrm{asec}(2)$
e) $\mathrm{arcctg}\left(\sqrt{3}\right)$
f) $\arcsin((\sin(5)))$
g) $\tan((\arctan(3)))$
h) $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan(x)$

Question 27
Résoudre les équation suivantes.

a) $\sin(x) + 1 = \cos(x)$
b) $2\sin\left(x^2-1\right) = \sqrt{2}$

Question 28
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $y = \arcsin\left(x^3 - 3x\right)$
b) $y = (x - \arctan(2x))^5$
c) $y = \mathrm{arccosec}\,(x^2)$
d) $y = x\arccos 2x$
e) $y = \arcsin\left(\sqrt{x}\right)$
f) $y = \dfrac{2}{\mathrm{arcctg}(x)}$

Question 29
Trouver $\dfrac{dy}{dx}$ pour chacune des relations suivantes.

a) $\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) = y^2$
b) $\arccos(y) = \arcsin(x)$
c) $\mathrm{e}^{\arctan(y)} = \sin(\ln(x))$

Question 30
Trouver les valeurs de x pour lesquelles la fonction $f(x) = \arcsin(3x)$ admet une droite tangente perpendiculaire à la droite $y = 3 - x/5$.

Question 31
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $y = x\arctan(x)$
b) $y = \arccos\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$
c) $y = \mathrm{arcctg}\left(\mathrm{e}^{3\sec(x)}\right)$
d) $y = \mathrm{asec}\left(x^2+1\right)$
e) $y = \dfrac{\arcsin(x^2)}{\ln(x)}$

Applications

Question 32
Soit la fonction $f(x) = x + \ln\left(x^2+1\right)$

a) Montrer que f est toujours croissante
b) Étudier la concavité de f et donner les points d'inflexion.

Question 33
Trouver les extremums absolus des fonctions données sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

a) $f(x) = \cos^2(2x)$
b) $f(x) = 5\sin(x) + 12\cos(x)$

Question 34
Un virus se propage de telle sorte que le nombre de personnes atteintes du virus t semaines après son apparition est donné par

$$N(t) = \frac{5000}{2 + 8e^{-\frac{3t}{4}}}.$$

a) Initialement, combien de personnes sont porteuses du virus

b) Combien de personnes seront atteintes 4 semaines après son apparition ?

c) Dans combien comptera-t-on 1300 victimes ?

d) À long terme, combien de personnes contracteront ce virus ?

e) Quel est le taux de propagation du virus après 2 semaines ?

f) Quel est ce taux à long terme ?

g) À quel moment le virus se propage-t-il le plus rapidement ?

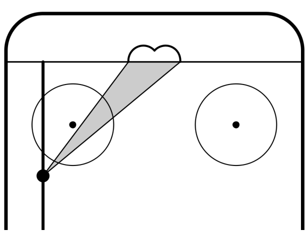
Question 35
On lance un projectile avec un canon selon une vitesse initiale de v_0 m/s. Si on néglige la résistance de l'air, la portée (la distance horizontale parcourue par le projectile) est donnée par la fonction

$$R(\theta) = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$$

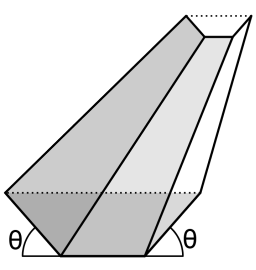
où $g = 9{,}8$ m/s^2 et θ est l'angle d'inclinaison du canon. Selon quel angle doit-on placer le canon pour avoir une portée maximale ?

Question 36
Les côtés congrus d'un triangle isocèle mesurent 5 cm. Trouver l'angle θ entre ces deux côtés qui maximise l'aire du triangle.

Question 37
À quelle distance de la ligne des buts un ailier gauche de hockey sur table doit-il lancer pour maximiser ses chances de marquer si le but mesure 5 cm de largeur et que le joueur est restreint à un rail situé à 8 cm du poteau le plus près ? On suppose que le joueur maximise ses chances de marquer si l'angle d'ouverture vers le but est maximal.

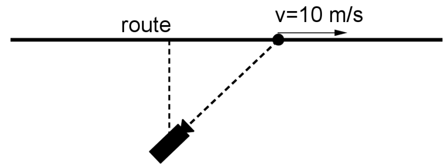


Question 38
On fabrique une auge à partir d'une feuille de métal de 120 cm de largeur. De chaque côté, on replie une bande de 40 cm selon un angle θ. Quel doit être cet angle pour que l'auge puisse contenir un volume maximal ?



Question 39
Trouver l'équation de la droite tangente à la courbe de $f(x) = \ln(\sin(x))$ au point $\left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Question 40
Un caméraman est posté à 5 m d'une route rectiligne et doit filmer une voiture qui passera sur cette route à vitesse constante de 10 m/s. À quelle vitesse angulaire (en rad/s) la caméra doit-elle pivoter exactement une seconde après que la voiture soit passée devant elle ?



Question 41
Une étude menée auprès d'athlètes olympiques révèle que la capacité pulmonaire de ces derniers obéit à la fonction

$$C(x) = \frac{0{,}8\ln(x) - 1{,}8}{0{,}009x},$$

où x est l'âge de l'athlète. À quel âge un athlète a-t-il une capacité pulmonaire maximale ?

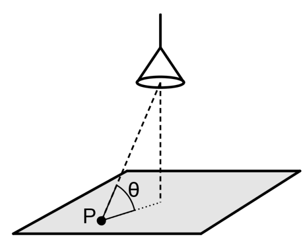
Question 42
À l'aide du test de la dérivée seconde, trouver les extremums locaux de

$$f(x) = \arctan(x) + \frac{x^2}{2} - x.$$

Question 43
Soit $f(x) = \sqrt{x-4}$ et la droite D joignant l'origine et un point quelconque sur la courbe de f. Quelle valeur de x minimise l'angle entre la droite D et l'axe des x

Question 44
On forme un cône en supprimant un secteur d'un disque de rayon égal r. Trouver la valeur de l'angle θ pour lequel le volume du cône obtenu est maximal.

Question 45
On doit suspendre une lampe au dessus du centre d'une table carrée de 2 m par 2 m. L'intensité de la lumière à un point P de la table est directement proportionnel au sinus de l'angle que forme le rayon lumineux avec la table, et inversement proportionnel à la distance entre P et la lampe. À quelle hauteur la lampe doit-elle être suspendue pour que l'intensité lumineuse soit maximale aux quatre coins de la table ?

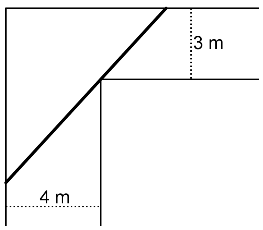


Question 46
Trouver les extremums locaux des fonctions suivantes.

a) $y = \ln^2\left(2x^2 - x\right)$.

b) $y = \sin^2 x + 2\cos x$.

Question 47
Quelle est la longueur maximale du tuyau de diamètre négligeable qui peut tourner le coin de ce corridor si on néglige la hauteur du corridor ?



Exercices récapitulatifs

Question 48
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $y = \log_3\left(\sqrt{x}\right)$

b) $y = \sqrt{\ln\left(\sqrt{x}\right)}$

c) $y = 4 \cdot \sqrt{\dfrac{1}{3^x}}$

d) $y = (e^x + 2^x)^5$

e) $y = \dfrac{e^x}{e^x - x}$

f) $y = \tan^2\left(e^{x^3}\right)$

g) $y = \log\left(\cos(3x) - \cos^3(2x)\right)$

h) $y = \sin(2^x + \cos(x))$

i) $y = \ln\left(\csc\left(3x^4 - 2e^x\right)\right)$

j) $y = \cot\sqrt{x} + \sqrt{\sec x^2}$

k) $y = \dfrac{x^2}{\tan\left(\sqrt[3]{x}\right)}$

l) $y = \sqrt{\sec(\sin(x^2))}$

m) $y = \ln(\arctan(e^x))$

n) $y = \operatorname{arcctg}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

o) $y = \arcsin\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$

Solutions

Question 1

a) 3 f) $5/2$ k) 3
b) $1/2$ g) $3,63$ l) $1/2$
c) 3 h) 1 m) 1
d) -2 i) e n) 99
e) $1/2$ j) 0 o) -1

Question 2

a) $x = 32$
b) $x = 81$
c) $x = \sqrt{5}$
d) $x = 1000$
e) $x = 1$
f) $x = \mathrm{e}$
g) $x = \mathrm{e}^{10}$
h) $x = \ln_3(100)$
i) $x = \dfrac{\ln(2/5)}{\ln(3/2)}$
j) $x = 2$

Question 3

a) $-\infty$ d) 0 g) ∞
b) $-\infty$ e) 0
c) $\nexists$ f) ∞

Question 4

a) 1
b) e^2
c) e
d) $\sqrt{\mathrm{e}}$
e) ∞
f) $-\infty$
g) 0^+
h) 0^-
i) ∞

Question 5

a) 0
b) 0
c) 0
d) 0
e) ∞
f) 1
g) $-\infty$
h) $\nexists$
i) 0
j) $\nexists$

Question 6

a) $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x}$
b) $f'(x) = 2 \cdot 3^{2x} \ln(3)$
c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}$
d) $y' = (2x+3)\mathrm{e}^{x^2+3x+4}$
e) $f'(x) = \dfrac{2}{x}$
f) $f'(x) = \dfrac{2}{x\ln(2)}$
g) $f'(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+3x+4}$
h) $\dfrac{dy}{dx} = 3^x\ln(3) - 3^{-x}\ln(3) + 3x^2 + 3$
i) $\dfrac{dy}{dx} = 8^{2^x+x^2}\left(2^x\ln(2)+2x\right)\ln(8)$
j) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2(3-x)}{\mathrm{e}^x}$
k) $\dfrac{dy}{dx} = 8^x\left(1 + x\ln(8)\right)$

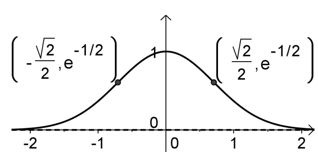
Question 7

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2}{(x^3+1)\ln(5)}$
b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$
c) $\dfrac{dy}{dx} = x^3\left(\ln(x)\right)^4\left(4\ln(x)+5\right)$
d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2x\ln(3)\sqrt{\log_3(x)}}$

Question 8

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\mathrm{e}^{x+y}}{2y - \mathrm{e}^{x+y}}$
b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y\ln(y) - 3y^3}{6xy^2 - x}$

Question 9

a) 

b) Base de $\sqrt{2}$, hauteur de $\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

Question 10

$k = \mathrm{e}$

Question 11

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{\mathrm{e}^x}}{2}$
b) $\dfrac{dy}{dx} = e^{\frac{x^2}{x-5}}\dfrac{x^2-10x}{(x-5)^2}$
c) $\dfrac{dy}{dx} = 2^{3^{5^x}}3^{5^x}5^x\ln(2)\ln(3)\ln(5)$
d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2\log(x)}{x}$
e) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4-16\ln(x)}{x^5}$
f) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{5\left(x+\ln^2(x)\right)^4(x+2\ln(x))}{x}$

Question 12

a) 1 c) 1 e) $\sqrt{2}$
b) $-\sqrt{3}/2$ d) 2 f) $1/\sqrt{3}$

Question 13

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
b) 0
c) -1
d) $\sqrt{3}$
e) $-\sqrt{2}$
f) -2
g) $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$
h) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Question 14

a) ++
b) ++
c) ++
d) Laissé à l'étudiant. Utilisez l'identité donnant le cosinus d'une somme de deux angles.
e) Laissé à l'étudiant.
f) Laissé à l'étudiant.
g) Laissé à l'étudiant.

Question 15

a) Laissé à l'étudiant. S'inspirer de la preuve de $(\sin(x))' = \cos(x)$; vous pouvez utiliser les deux lemmes démontrés en classe sans les redémontrer.
b) Laissé à l'étudiant. Dériver directement.
c) Laissé à l'étudiant. Fait en classe, tentez de le refaire par vous même.

Question 16

a) Laissé à l'étudiant. S'inspirer des preuves vues en classe.
b) Laissé à l'étudiant.

Question 17

a) 1
b) 0
c) 0
d) 0
e) 0
f) ∞
g) 1
h) $-\infty$
i) $\nexists$
j) 0
k) $\nexists$

Question 18

a) $-\infty$
b) $\nexists$
c) $\nexists$
d) $-\infty$ car $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$
e) $-\infty$

Question 19

a) Pas d'A.H. ; A.V. en $x = 0$.
b) A.H. en $y = 0$; A.V. en $x = 2$ et en $x = 3$.
c) A.H. en $y = 4$; pas d'A.V.

Question 20

a) $A = \frac{ncr}{2}$
b) $c = 2r\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$
c) Laissé à l'étudiant.
d) Laissé à l'étudiant. Indice : il faut adapter le résultat $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ à la situation.

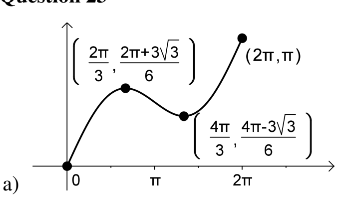
Question 21

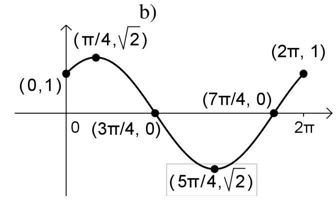
a) $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2\sin(x) + x^3\cos(x)$
b) $\dfrac{dy}{dx} = 3\sin(x) - 3\sin(3x)$
c) $\dfrac{dy}{dx} = 2\sec^2(x)\tan(x)$
d) $\dfrac{dy}{dx} = 3\csc(3x)\left(1 - 2\csc^2(3x)\right)$
e) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\left(x^2+2x\right)\sec^2\left(\frac{x^2}{x+1}\right)}{(x+1)^2}$
f) $\dfrac{dy}{dx} = 3\mathrm{e}^{\sin(3x)}\cos(3x)$

Question 22

a) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\sin(x) + x\cos(x)}{\cos(y) - y\sin(y)}$
b) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$
c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{12x^3}{3y^2\sec\left(y^3\right)\tan\left(y^3\right) + 2y}$
d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-y\tan\left(e^y\right)}{xye^y\sec^2\left(e^y\right) + 1}$

Question 23

a) 

b) 

Question 24

a) $\frac{dy}{dx} = \mathrm{e}^{-x}\sin \mathrm{e}^{-x}$

b) $\frac{dy}{dx} = \cos x\left(3sin^2(x) + 3^{\sin(x)}\ln(3)\right)$

c) $\frac{dy}{dx} = \sec(x)$

d) $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x\csc(x^2)\left(1+\cot(x^2)+\csc(x^2)\right)}{(1-\cot(x^2))^2}$

e) $\frac{dy}{dx} = -2x\sec^2(x^2)\sin\left(\tan(x^2)\right)$

f) $\frac{dy}{dx} = e^{x^3}\sec^2(2x)\left(3x^2+4\tan(2x)\right)$

g) $\frac{dy}{dx} = e^{\tan(x)}\sec^2(x) - \cos(2x)$

h) $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{x-4}\csc^2\left(\frac{x-1}{x-4}\right)$

Question 25

a) $1/2$ d) $-\pi/4$ g) $\pi/3$

b) $\pi/7$ e) $2\pi/3$

c) $-2\pi/5$ f) $-\pi/4$

Question 26

a) $\frac{\pi}{6}$

b) $\frac{2\pi}{3}$

c) $-\frac{\pi}{4}$

d) $\frac{\pi}{3}$

e) $\frac{\pi}{6}$

f) 5

g) 3

h) $\frac{\pi}{2}$

Question 27

a) Mettre au carré chaque membre de l'égalité. $x = -\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

b) $x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{4} + +1 + 2\pi k}, k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \pm\sqrt{\frac{3\pi}{4} + 1 + 2\pi k}, k \in \mathbb{Z}$

Question 28

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2-3}{\sqrt{1-(x^3-3x)^2}}$

b) $\frac{dy}{dx} = 5\,(x-\arctan(2x))^4\,\frac{4x^2-1}{4x^2+1}$

c) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x\sqrt{x^4-1}}$

d) $\frac{dy}{dx} = \arccos(2x) - \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}$

e) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$

f) $\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{(x^2+1)\,\mathrm{arcctg}^2(x)}$

Question 29

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{2x^2+2y^3-x}$

b) $\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$

c) $\frac{dy}{dx} = \frac{\left(1+y^2\right)\cos(\ln(x))}{xe^{\arctan(y)}}$

Question 30

$x = -4/15$ et $x = 4/15$

Question 31

a) $\frac{dy}{dx} = \arctan(x) + \frac{1}{1+x^2}$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2+2}{\sqrt{x^4-6x^2+1}}$

c) $\frac{dy}{dx} = -\frac{3\mathrm{e}^{3\sec(x)}\sec(x)\tan(x)}{1+\mathrm{e}^{6\sec(x)}}$

d) $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$

e) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{\ln(x)\sqrt{1-x^4}} - \frac{\arcsin(x)}{x\ln^2(x)}$

Question 32

a) Laissé à l'étudiant. Montrer que la dérivée est toujours ≥ 0

b) Concave vers le haut sur $[-1,1]$, concave vers le bas sur $]-\infty,-1]$ et $[1,\infty[$, points d'inflexion en $x=-1$ et $x=1$.

Question 33

a) max=1, atteint en $x \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$, min=0, atteint en $x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

Question 34

a) 500 personnes

b) Environ 2085 personnes

c) 1,96 semaines

d) $\lim_{t\to\infty} N(t) = 2500$ personnes

e) $N'(2) = 467,24$ personnes/semaine

f) $\lim_{t\to\infty} N'(t) = 0$ personnes (il faut mettre en évidence les termes dominants)

g) Il faut trouver le maximum de $N'(t)$. Comme $N''(t') < 0$ pour tout $x > 0$, $N'(t)$ est maximale lorsque $t = 0$.

Question 35

$\theta = \frac{\pi}{4}$

Question 36

$\theta = \frac{\pi}{2}$

Question 37

À $2\sqrt{26}$cm.

Question 38

$\theta = \frac{\pi}{3}$ rad

Question 39

$y = x + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4}$

Question 40

$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{2}{5}$ rad/s

Question 41

$\mathrm{e}^{13/4} \approx 25,79$ ans

Question 42

min. local en $(0,0)$

Question 43

$x = 8$

Question 44

$\theta = \sqrt{2}\pi$ rad $\approx 254,56°$

Question 45

$h = \sqrt{2}$m

Question 46

a) Aucun max. local, min. local en $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ et en $(1,0)$.

b) max. local en $(2k\pi, 2)$, min. local en $\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi, -2\right)$.

Question 47

Environ 9,87 m

Question 48

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x\ln(3)}$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4x\sqrt{\ln\left(\sqrt{x}\right)}}$

c) $\frac{dy}{dx} = -2\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^x}\ln(3)$

d) $\frac{dy}{dx} = 5\,(e^x+2^x)^4\,(e^x+2^x\ln(2))$

e) $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}$

f) $\frac{dy}{dx} = 6x^2e^{x^3}\tan\left(e^{x^3}\right)\sec^2\left(e^{x^3}\right)$

g) $\frac{dy}{dx} = \frac{-3\sin(3x)+6\cos^2(2x)\sin(2x)}{\ln(10)((\cos(3x-\cos^3(2x)))}$

h) $\frac{dy}{dx} = (2^x\ln(2)-\sin(x))\cos(2^x+\cos(x))$

i) $\frac{dy}{dx} = \left(12x^3-2e^x\right)\cot\left(3x^4 2e^x - 3x^4\right)$

j) $\frac{dy}{dx} = x\tan\sqrt{\sec(x^2)} - \frac{\csc^2\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}$

k) $\frac{dy}{dx} = 2x\cot\left(\sqrt[3]{x}\right) - \frac{\sqrt[3]{x^4}}{3}\csc\left(\sqrt[3]{x}\right)$

l) $\frac{dy}{dx} = \cos\left(x^2\right)\tan\left(\sin x^2\right)\sqrt{\sec\left(\sin x^2\right)}$

m) $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{(1+e^{2x})\arctan(e^x)}$

n) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$

o) $\frac{dy}{dx} = \frac{1-\ln x}{x^2+\ln^2 x}$