Notes de cours

Calcul différentiel

Yannick Delbecque, hiver 2018

Chapitre 1

Révision

1.1 Questions notations et abréviations

1.1.1 Ensembles

Un **ensemble** est une collection d'éléments. Si x est un élément de de l'ensemble A, on écrit $x \in A$. Sinon, on écrit $x \notin A$. On ne tient pas compte des répétitions dans les ensembles : $\{1,2,3\}$ est le même ensemble que $\{1,2,3,3,3,3,\}$!

On peut décrire un ensemble de plusieurs manières.

Compréhension Par un condition qui doit être satisfaite pour qu'un x soit élément de l'ensemble.

$$\{x \mid \text{ condition sur } x\}$$

Extension En donnant une liste des éléments de l'ensemble

$$\{-2,1,\pi,10\}$$

Un même ensemble peut être décrit de plusieurs manières :

$$A = \{0,2,4,6,8\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ est un nombre naturel pair plus petit que} 10\}$$

Les ensembles A et B sont identiques car ils contiennent les mêmes éléments. On écrit $A = B$ pour dire que deux ensembles sont **égaux**, c'est à dire qu'ils contiennent les mêmes éléments.

Opérations de base sur les ensembles

Union

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Intersection

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$

Différence

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$$

Sous-ensemble Si chaque élément d'un ensemble A est aussi un élément d'un ensemble B, alors on dit que A est un **sous-ensemble** de B. On écrit alors

$$A \subseteq B.$$

Ne pas confondre $\in$ (« est élément de ») avec $\subseteq$ (« est sous-ensemble de ».

Ensembles souvent utilisés dans ce cours Dans ce cours, nous discuterons des ensembles de nombres suivants :

Les ensembles de nombres :

$\mathbb{N}$ Les nombres naturels

$\mathbb{Z}$ Les nombres entiers

$\mathbb{Q}$ Les nombres rationnels

$\mathbb{R}$ Les nombres réels

Ces ensembles importants seront décrits plus loin.

Nous utiliserons aussi les intervalles :

- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (intervalle **fermé**)
- $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (intervalle **ouvert**)
- $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
- $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

1.2 Logique et abréviations

« non-A » Négation de A. Diverses notations sont utilisées, par exemple $\neg A$

« si A, alors B » Notation : $A \implies B$. A est l'hypothèse, B est la conclusion. On dit aussi que A est une condition suffisante pour B et que B est une condition nécessaire pour A.

A si et seulement si B Notation : $A \iff B$ ou A ssi B. $A \iff B$ est équivalent à dire que $A \implies B$ et $B \implies A$.

« $\forall A$ » « Pour tout A. » On écrit par exemple

$$\forall n \in \mathbb{Z}. n \text{ est pair ou impair}$$

pour dire qu'un nombre entier quelconque est soit pair, soit impair.

« $\exists A$ » « Il existe A ». On écrit par exemple

$$\exists n \in \mathbb{Z}. n \text{ est un nombre premier}$$

pour dire qu'il y a (au moins) un nombre entier qui est premier.

La **contraposée** d'une implication $A \implies B$ est l'implication $\text{non}-B \implies \text{non}-A$. La contraposée est équivalente à l'implication originale.

Une **tautologie** est une affirmation qui est toujours vraie pour des raisons logiques. Par exemple :

$$A \implies A$$

$$A \text{ et } B \implies A$$

Axiome Propriété qui est acceptée sans démonstration, considérée comme assez évidente pour être le fondement d'une théorie mathématique.

Théorème Résultat important, dont la validité est établie par une démonstration ou une preuve, et qui a une grande importance dans un domaine donné des mathématiques étant donné ses multiples conséquences. Abréviation en classe : « thm ».

Proposition Résultat important, dont la validité est établie par une démonstration ou une preuve. Abréviation en classe : « prop ».

Lemme Résultat servant à démontrer un ou plusieurs autres résultats.

Corrolaire Résultat qui est déduit facilement d'un résultat précédant, une conséquence immédiate d'un théorème ou d'une proposition.

preuve (ou démonstration) Suite de déduction logiques dont la conclusion est un théorème, une proposition ou un lemme. Une preuve réponds à la question « pourquoi c'est vrai. « On indique habituellement la fin d'une preuve à l'aide de CQFD (« ce qu'il fallait démontrer »), QED (« *quod erat demonstrandum* », CQFD en latin) ou par un signe comme $\square$. Il existe plusieurs formes de preuve (directe, par induction, par contradiction) que nous verrons à l'œuvre au cours de la session.

Note : « démontrer » ne veut pas dire « donner un exemple ». Un cas particulier n'établit pas la vérité pour tous les cas. Cependant, un seul cas particulier peut réfuter une affirmation générale. On appel un tel exemple un **contre exemple**.

Exemple 1.1. Le fait que

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

est un cas particulier qui ne démontre pas que

$$x^2 + y^2 = z^2$$

pour n'importe quel nombres x, y et z. Par exemple,

$$2^2 + 3^2 \neq 4^2.$$

Ce dernier exemple démontre cependant que

$$x^2 + y^2 = z^2$$

n'est pas toujours vrai! —

Exemple 1.2. Démontrer qu'il n'est pas vrai que

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2$$

à l'aide d'un contre-exemple.

On peut prendre le cas particulier $x = 2$ et $y = 3$.

$$(2 + 3)^2 = 25, \text{ mais } 2^2 + 3^2 = 13.$$ —

1.3 Ensembles de nombres

Nombres naturels

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Un principe important qui est souvent considéré comme une partie essentielle de la définition des nombres naturels :

Proposition 1.1 (principe d'induction)**.** Si (1) une proposition impliquant une variable n représentant un nombre entier est vraie pour le nombre naturel $n = 0$ et (2) lorsqu'elle est vraie pour $n > 0$ et ses prédécesseurs, alors elle l'est aussi pour $n + 1$, alors la proposition est vraie pour tout n. —

Nombres entiers

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Quelques concepts liés aux nombres naturels et aux nombres entiers.

Définition 1.1. n est un nombre pair s'il existe un nombre $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n = 2k.$$

—

Définition 1.2. n est un nombre impair s'il existe un nombre naturel $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n = 2k + 1.$$

—

Théorème 1.1 (fondamental de l'arithmétique)**.** Tout nombre entier n peut se factoriser de manière unique (à l'ordre des facteurs près) comme un produit de facteur premiers.

Nombres rationnels

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\}$$

Théorème 1.2. Un nombre réel a peut s'écrire comme une fraction si et seulement si son développement décimal est périodique.

Nombres réels

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ a un développement décimal quelconque, possiblement infini}\}$$

Les nombres peuvent être combinés à l'aide des opérations de base : addition, soustraction, multiplication, division, exposants et racines. Quand une expression combine plusieurs opérations, on doit les effectuer dans l'ordre conventionnel déterminé par la « priorité des opérations ».

On suppose que les opérations de base ont les propriétés vu au secondaire (voir formulaire d'algèbre) : associativité, distributivité, commutativité, etc.

Théorème 1.3. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Lemme 1.1.

$$n \text{ pair} \iff n^2 \text{ pair.}$$

—

Démonstration. ($\Longrightarrow$) Si n est pair, alors n est le double d'un certain nombre k. On peut donc écrire que $n = 2k$. Dans ce cas,

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2),$$

ce qui montre que n^2 est bien le double d'un nombre entier.

($\Longleftarrow$) On démontre la contraposée : si n est impair, alors n^2 est aussi impair. Supposons que n est impair ; il peut donc s'écrire comme $n = 2k + 1$ pour un certain nombre k. Dans ce cas,

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$

ce qui établi que n^2 est impair. □

du théorème. Supposons que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel. Nous allons montrer que cette hypothèse mène à un résultat absurde et qu'elle ne peut pas être vraie, donc que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Si $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel, il existe deux entiers a et $b \neq 0$ tel que

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

Comme on peut toujours simplifier une faction, on peut simplifier $\frac{a}{b}$ pour obtenir une fraction simplifiée $\frac{m}{n}$. On a donc

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

où m et n n'ont aucuns facteurs communs.

En multipliant chaque membre de l'égalité $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ par n, on obtient

$$n\sqrt{2} = m.$$

En mettant au carré, on a que

$$n^2(2) = m^2$$

m^2 doit donc être pair. Par le lemme précédant, on a que m doit être pair lui aussi. m peut donc s'écrire comme $m = 2k$ pour un certain entier k. En remplaçant m par $2k$ dans l'égalité précédente

$$n\sqrt{2} = m,$$

on obtient que

$$n\sqrt{2} = 2k.$$

On met au carré pour obtenir

$$2n^2 = 4k.$$

En divisant par 2, on trouve

$$n^2 = 2k.$$

n^2 est donc pair, ce qui implique par le lemme précédant que n est pair lui aussi.

La fraction $\frac{m}{n}$ peut donc être simplifiée car le numérateur m et le dénominateurs n sont tous les deux pairs ! Cela contredit le fait que $\frac{m}{n}$ est une faction simplifiée. L'hypothèse « $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel » est donc fausse et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. $\square$

1.4 Algèbre

L'objectif principal de l'algèbre élémentaire est de déterminer une valeur inconnue dans une relation numérique. On peut poser ce genre de questions sous forme « écrite », par exemple

> (Problème vieux de quelques millénaires figurant sur la tablette cunéiforme AO 8862)
> J'ai multiplié longueur et largeur pour obtenir l'aire. J'ai additionné ce par quoi la longueur dépasse la largeur à l'aire et j'ai obtenu 183. La somme de la longueur et de la largeur est 27. Quelles sont la longueur, la largeur et l'aire ?

Les géomètres et mathématiciens ont développé au fil du temps différentes manière de représenter ce genre de problème afin de les résoudre plus facilement. La notation moderne, malgré le fait qu'elle exige plusieurs années d'entrainement, est de loin la plus efficace. Si x est la longueur et y la largeur, le problème se traduit en notation moderne comme

$$\begin{aligned} x - y + xy &= 183 \\ x + y &= 27 \end{aligned}$$

L'algébriste moderne applique ensuite quelques principes simples de manière astucieuse pour déterminer les valeurs inconnue. On peut même décrire la méthode de solution avec ces techniques : (1) exprimer y en fonction de x dans la seconde équation : $y = 27 - x$ (2) substituer la valeur trouvée dans la première équation $x - (27 - x) + x(27 - x) = 183$ (3) résoudre l'équation obtenue en regroupant : $-x^2 + 29x - 210 = 0$. On trouve deux solutions : $x = 14$ et $x = 15$, et donc les valeurs de y correspondantes : $y = 13$ et $y = 12$. L'aire correspondante est respectivement 182 et 180.

Si la solution de cet ancien problème vous semble complexe, en comparant avec une solution n'utilisant aucune des idées modernes comme des variables, la substitution, isoler, la formule quadratique, etc, la solution serait beaucoup plus complexe.

1.4.1 Principes généraux

Voici les principes les plus utilisés dans les raisonnements algébriques :

Une variable représentant un nombre inconnu d'un certain type (entier, rationnel, nombre réel) a les mêmes propriétés que les nombres du même type. On peut y appliquer les mêmes opérations.

(Transitivité de l'égalité) $A = B$ et $B = C$ alors $A = C$.

(Application d'une opération) Si $f(x)$ est une opération (fonction), on a que

$$A = B \implies f(A) = f(B).$$

Si f est une opération inversible, alors $A = B \iff f(A) = f(B)$.
Si $f^{-1}(x)$ est l'opération inverse de $f(x)$, alors

$$f(A) = B \iff A = f^{-1}(B).$$

(Substitution) si $A(x) = B(x)$ alors $A(C) = B(C)$, où C est une expression algébrique quelconque substituée à la place de la variable x.

Exemple 1.3. Par exemple, si on écrit

$$(x+2)^2 = (x+2)(x+2) = x(x+2)+2(x+2) = x^2+2x+2x+4 = x^2+4x+4.$$

On utilise (plusieurs fois) la *transitivité* pour conclure que

$$(x+2)^2 = x^2+4x+4.$$

Note : on écrit souvent verticalement une telle suite d'égalité quand elle est trop longue :

$$\begin{aligned}(x+2)^2 &= (x+2)(x+2)\\ &= x(x+2)+2(x+2)\\ &= x^2+2x+2x+4\\ &= x^2+4x+4.\end{aligned}$$

—

On utilise le principe de *substitution* quand on prend une identité algébrique simple pour en trouver une plus complexe.
Exemple 1.4. À partir de l'indentité générale pour les différences de carré

$$X^2 - Y^2 = (X-Y)(X+Y),$$

Cette identité est vraie peu importe les valeurs de X et Y. On peut déduite une nouvelle identité en substituant (par exemple) x^2 à X et $2x$ à Y :

$$(x^2)^2 - (2h)^2 = \Big((x^2)-(2x)\Big)\Big((x^2)+(2x)\Big),$$

Cette dernière égalité est donc déduite de la première à l'aide du principe de substitution.

En simplifiant l'identité obtenue, on obtient que

$$x^4 - 4h^2 = (x^2-2x)(x^2+2x)$$

—

L'application d'une même opération sur chaque membre d'une égalité est probablement le premier principe algébrique appris dans les cours d'algèbre élémentaire et est une généralisation du principe ayant donné son nom à l'algèbre.
Exemple 1.5. Si on a que $2x = 5$, on obtient que

$$\frac{2x}{2} = \frac{5}{2}$$

yy en applicant l'opération « diviser par deux » sur chaque membre de l'égalité initiale.

Comme « diviser par deux » est une opération inversible (dont l'inverse est « multiplier par deux », on peut écrire

$$2x = 5 \iff \frac{2x}{2} = \frac{5}{2}.$$

L'opération « mettre au carré » n'est pas inversible. Par exemple, si on met -2 au carré, on obtient 4. L'opération inverse est ambigüe : on pourra obtienir un carré de 4 à partir de 2 ou de -2.

Si on applique une opération non inversible, comme mettre au carré, on ne peut pas obtenir une équivalence entre les identités. Par exemple, l'implication

$$2x = 5 \implies 4x^2 = 25$$

est vraie, mais l'équivalence

$$2x = 5 \iff 4x^2 = 25$$

est fausse ! —

1.4.2 Propriétés algébriques utiles

Les identités algébriques suivantes sont très souvent utilisées.

$AB + AC = A(B+C)$ (mise en évidence simple)

$AC + AD + BC + BD = (A+B)(C+D)$ (mise en évidence double)

$\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$ (rationalisation)

$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$ (différence de carrés)

$\left(\sqrt{A} \pm \sqrt{B}\right)\left(\sqrt{A} \mp \sqrt{B}\right) = A - B$ (conjugué)

$A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$ (différence de cubes)

$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ (binôme carré parfait)

$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$ (développement du binôme degré 3)

$(A+B)^4 = A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4$ (développement du binôme degré 4)

1.4.3 Triangle de Pascal

Le triangle de Pascal est un truc permettant de déterminer rapidement les coefficients du développement d'un binôme de degré quelconque : si on développe une expression de la forme $(A+B)^n$, les coefficients du développement sont donnée par la n-ième ligne du triangle de Pascal.

Triangle de Pascal

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
(A+B)^0 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
(A+B)^1 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
(A+B)^2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
(A+B)^3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
(A+B)^4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
(A+B)^5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
(A+B)^6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\vdots & & & & & & & \vdots & & & & & &
\end{array}$$

Exemple 1.6. Le développement de $(x+2)^5$ a la forme suivante :

$$C_0x^5 + C_1x^42^1 + C_2x^32^2 + C_3x^22^3 + C_4x^12^4 + C_52^5$$

Les nombres C_0, C_1, ..., C_5 sont donnés par la ligne correspondant à $(A+B)^5$ du triangle de Pascal, soit

$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1.$$

On a donc que

$$(x+2)^5 = x^5 + 5x^4 2 + 10x^3 2^2 + 10x^2 2^3 + 5x 2^4 + 2^5$$

—

1.4.4 Autres principes fréquemment utilisés pour résoudre des équations

(EQ1) $ABC = 0 \implies A = 0$ ou $B = 0$ ou $C = 0$

(EQ2) $\dfrac{A}{B} = 0 \iff A = 0$ et $B \neq 0$

(EQ3) $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D} \iff AD = BC$ et $B, D \neq 0$

Le premier de ces principes permet de résoudre des équations sous forme factorisée. Par exemple, si on a l'équation

$$(x-2)(x+1) = 0$$

On a une expression de la forme $AB = 0$. Il faut donc que $A = 0$ ou que $B = 0$. Dans ce cas particulier, il faut donc que

$$x - 2 = 0 \text{ ou } x + 1 = 0.$$

Cela implique que $x = 2$ ou $x = -1$.

Ce principe s'applique à un produit d'un nombre de facteur aussi grand que l'on veut : si un produit de facteurs est nul, un des facteurs doit être nul. Ainsi, les zéros de

$$(x-3)(x+\sqrt{33})(x-\log_2(3)) = 0$$

sont $x = 3$, $x = -\sqrt{33}$ et $x = \log_2(3)$.

La simplicité de la solution d'une équation factorisée est évidente si on la compare avec même équation non-factorisée :

$$x^3 - x^2\log_2(3) + \sqrt{33}x^2 - \sqrt{33}x\log_2(3) - 3x^2 + 3x\log_2(3) - 3\sqrt{33}x + 3\sqrt{33}\log_2(3) = 0.$$

C'est une des raisons principales pour lesquelles les techniques de factorisations de polynômes sont importante : elles permettent de prendre un équation polynômiale de degré élevé et de la transformer (en la factorisant) en plusieurs équations de degré moins élevée (donc plus faciles a résoudre).

Le second principe permet de résoudre facilement des expressions rationnelles factorisée :

$$\frac{(x-3)(x+1)}{x-6} = 0$$

a comme solution les zéros de $(x-3)(x+1)$, soit $x = 3$ et $x = -1$. Seul le numérateur détermine les zéros d'une expression de la forme A/B. Cependant, le dénominateur ne peut pas s'annuler car il ne peut par y avoir de division par zéro. Ainsi, dans une équation comme

$$\frac{(x-3)(x+1)}{x^2+2x+1}=0$$

$x=3$ et $x=-1$ sont les zéros du numérateur, mais $x=-1$ annule le dénominateur (ce qui cause une division par zéro!). La valeur $x=-1$ n'est donc par un zéro de l'équation.

1.4.5 Opérations inverses usuelles

En algèbre, on utilise souvent le « principe de la balance » : on peut faire la même opération de « chaque côté » d'une égalité. Les opérations inverses les plus souvent utilisée sont indiquées dans la liste suivante, avec les restrictions faisant en sorte que les opérations soient inversibles.

$A+C=B \iff A=B-C$

$CA=B \iff A=\frac{1}{C}B$ si $C\neq 0$.

$A^n=B \implies A=\pm\sqrt[n]{B}$ si n pair.

$A^n=B \iff A=\sqrt[n]{B}$ si n impair.

$b^A=B \iff \log_b(B)=A$ si $B>0$.

$\sin(A)=B \iff A=\arcsin(B)$ si $-\frac{\pi}{2}\leq A\leq\frac{\pi}{2}$

$\cos(A)=B \iff A=\arccos(B)$ si $0\leq A\leq\pi$

$\tan(A)=B \iff A=\arctan(B)$ si $-\frac{\pi}{2}<A<\frac{\pi}{2}$

1.4.6 Factorisation

Comme nous l'avons dit précédemment, la factorisation est une stratégie importante pour simplifier une équation afin de la résoudre.
Exemple 1.7. Considérons l'équation

$$x^2-4x-5=0.$$

En factorisant le membre de gauche, on obtient

$$(x+1)(x-5)=0.$$

Comme un produit de facteur est nul si un de ses facteur est nul, soit $(x+1)=0$, soit $(x-5)=0$. Les solutions sont donc $x=-1$ ou $x=5$.

On voit dans cet exemple que chaque facteur de degré un, donc de la forme $x-a$, correspond à une solution de l'équation originale. Il y a en fait une correspondance entre les facteurs de degré 1 et les zéro : si $x=a$ est un zéro d'une équation polynômiale $P(x)=0$, alors $(x-a)$ est un facteur de $P(x)$.

Le résultat suivant dit que chaque zéro d'un polynôme est lié à un « facteur coupable » lui correspondant et réciproquement.
Théorème 1.4 (Factorisation)**.** Si $P(x)$ est un polynôme quelconque, alors a est un zéro de $P(x)$ si et seulement si $(x-a)$ est un facteur de $P(x)$.

Autrement dit :

$$P(a)=0 \iff P(x)=(x-a)Q(x).$$

Sous forme de slogan :

« zéro si et seulement si facteur (de degré 1). »

Exemple 1.8. Si $P(x) = x^2 - x - 2$, on a que

$$P(2) = 2^2 - 2 - 2 = 0.$$

La valeur $a = 2$ est donc un zéro de $P(x)$. Le théorème de factorisation dit que $P(x)$ doit avoir $(x-2)$ (c'est à dire le facteur (x-le zéro)) comme facteur. Si on divise $P(x) = x^2 - x - 2$ par $(x-2)$, on trouve que

$$P(x) = (x-2)(x+1),$$

ce qui est est bien de la forme donnée par le théorème :

$$P(x) = (x-a)Q(x).$$

—

Exemple 1.9. La valeur $x = 1$ est un zéro de $x^3 - 1$. On sait donc par le théorème de factorisation que $x^3 - 1 = (x-1)Q(x)$, où $Q(x)$ est un polynôme à déterminer. On peut toujours déterminer $Q(x)$ en divisant :

$$Q(x) = \frac{x^3 - 1}{(x-1)}.$$

En divisant, trouve que $Q(x) = x^2 + x + 1$, et donc

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1).$$

—

Démonstration. ($\Longrightarrow$) Supposons que $P(a) = 0$. On peut diviser $P(x)$ par $(x-a)$ pour obtenir un expression de la forme

$$P(x) = (x-a)Q(x) + R(x),$$

où $R(x)$ est le reste de la division et $Q(x)$ le quotient.

Le degré de $R(x)$ doit être zéro car on divise par le polynôme $(x-a)$ qui est de degré 1. (Le degré du reste est toujours strictement inférieur au degré du polynôme par lequel on divise.) Comme un polynôme de degré 0 est en fait une constante $R \in \mathbb{R}$, en divisant on a donc réécrit $P(x)$ comme suit :

$$P(x) = (x-a)Q(x) + R$$

Si on évalue chaque membre de cette dernière égalité en a, on obtient

$$P(a) = (a-a)Q(a) + R$$

Par hypothèse, $P(a) = 0$. De plus, le facteur $a - a$ est toujours nul. On a donc

$$0 = 0 + R.$$

La seule valeur de R satisfaisant cette équation est zéro. On a donc établit que

$$P(x) = (x-a)Q(x) + 0 = (x-a)Q(x),$$

c'est à dire que $(x-a)$ est un facteur de $P(x)$.

($\Longleftarrow$) Pour démontrer la réciproque, on fait l'hypothèque que $(x-a)$ est un facteur de $P(x)$. Dans ce cas, on peut écrire $P(x)$ comme un produit de facteur de la forme

$$P(x) = (x-a)Q(x)$$

où $Q(x)$ est le quotient de la division de $P(x)$ par $(x-a)$.

On veut montrer que $P(a) = 0$. Il suffit d'évaluer la forme factorisée :

$$P(a) = (a-a)Q(a) = (0)Q(a) = 0.$$

□

On peut conclure du théorème de factorisation que pour un polynôme $P(x)$,

$$P(x) \text{ n'a pas de zéro} \iff P(x) \text{ n'a pas de facteur de la forme } (x-a).$$

Théorème 1.5. Les polynômes réels irréductibles sont de l'une des deux formes suivantes :

- degré 1 de la forme $c(x-a)$ (a est nécessairement un zéro)
- degré 2 de la forme ax^2+bx+c, où $b^2-4ac<0$. (polynôme de degré deux sans zéros).

Théorème 1.6 (Théorème fondamental de l'algèbre)**.** Tout polynôme réel peut s'écrire comme un produit d'une constante et de polynômes irréductibles, unique à l'ordre des facteurs près.

1.5 Fonction, graphe et domaine

Définition 1.3. Une **fonction** $f: A \to B$ allant d'un ensemble A à un autre ensemble B est une règle quelconque associant à des éléments a de l'ensemble A un unique élément b de l'ensemble B.

On dénote $f(a)$ l'élément de l'ensemble B associé à a.

Définition 1.4. Le **domaine** d'une fonction $f: A \to B$ est l'ensemble des éléments de A où $f(a)$ est défini. Notation :

$$\mathrm{dom}(f) = \{a \mid f(a) \text{ est défini}\}.$$

Les fonctions qui seront étudiée dans ce cours sont des **fonctions réelles** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

On détermine le domaine d'une fonction réelle définie à l'aide des opérations dites « élémentaires » en utilisant les principes suivants.

$\cancel{(\div 0)}$ Il ne peut y avoir de division par zéro.

$$\frac{A}{B} \text{ est défini} \iff B \neq 0$$

$\cancel{\left(\sqrt{<0}\right)}$ Il ne peut y avoir de racine paire de nombre négatifs.

$$\sqrt{A} \text{ est défini} \iff A \geq 0$$

$\cancel{\left(\log_b(\leq 0)\right)}$ Le logarithme d'un nombre négatif ou nul n'est pas défini (peu importe la base)

$$\log_b(A) \text{ est défini} \iff A > 0$$

On détermine le domaine d'une fonction définie par composition de plusieurs fonction élémentaires en vérifiant que chacune des opérations utilisée est définie.

1.5.1 Définition d'une fonction

On peut définir une fonction f de plusieurs manières.

On peut le faire en donnant explicitement une expression algébrique pour déterminer $f(x)$ à partir de la valeur de x, par exemple

$$f(x) = x^2.$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} x \mapsto x^2$$

On peut aussi définir une fonction *implicitement* à l'aide d'une égalité algébrique, par exemple :

$$y = x^2$$

$$x^2 - y = 0$$

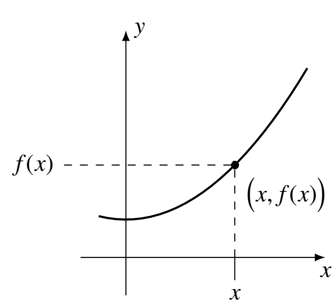
Dans ce cas, il faut spécifier quelle variable est déterminée en fonction de l'autre variable. La variable « entrée » est appelée **variable indépendante** et la « sortie » est appelé variable dépendante — elle dépend de la valeur de la variable indépendante.

Un définition implicite ne définit pas toujours une fonction : il arrive qu'une valeur donnée de la variable indépendante corresponde à plusieurs valeurs de la variable dépendante. Par exemple

$$y^2 = x$$

ne définie par une fonction si on considère y comme variable dépendante. En effet, pour $x = 1$, les valeurs $y = 1$ et $y = -1$ satisfont toutes deux l'équation donnée. Il n'y a donc pas une valeur unique de y associée à la valeur $x = 1$. Cette relation ne défini pas une fonction.

Graphe d'une relation ou d'une fonction Le graphe d'une fonction f est l'ensemble des « points » $(x, f(x))$. Dans le cas des fonctions réelles, ces points peuvent être placés dans le plan cartésien pour obtenir une représentation graphique de f. Par exemple, si $f(x) = x^2$, on obtient



On peut trouver un point sur le graphe d'une relation en donnant une valeur à une variable et en isolant pour trouver la valeur de l'autre variable.

Exemple 1.10. Trouvons un point sur le graphe de la relation

$$2x^2 + 3y^2 = 1.$$

Si on prend $x = 0$, on obtient

$$2(0)^2 + 3y^2 = 1.$$

En simplifiant

$$3y^2 = 1.$$

On isole y :

$$y^2 = \frac{1}{3}.$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Il y a donc deux points correspondant à $x = 0$ sur le graphe de la relation donnée :

$$\left(0, 1/\sqrt{3}\right) \text{ et } \left(0, -1/\sqrt{3}\right).$$