Chapitre 4

Propriétés de la dérivée

Le calcul de la fonction dérivée à l'aide de la définition donnée au chapitre précédent est laborieuse. Heureusement, il est possible « d'algébriser » le calcul de la dérivée. On démontrera dans ce chapitre un certain nombre de propriétés de la dérivée qui, prise ensemble, permettent de déterminer la dérivée d'une fonction en appliquant des « formules de dérivation « (ou « règles de dérivation ».

Ces propriétés ont été découvertes au fil du temps par plusieurs mathématiciens qui travaillaient sur différents problèmes allant du calcul d'aires délimitées par des courbes algébriques ou à déterminer des minimums et maximums liés à des problèmes de géométrie. C'est à Newton et Leibniz que l'on doit d'avoir su les présenter de manière systématique pour la première fois et d'avoir compris le lien entre le calcul d'aire et la dérivée.

4.1 Linéarité et dérivée de puissances

Proposition 4.1.

(a) $(C)' = 0$

(b) $(x^n)' = nx^{n-1}$ si n est un entier naturel positif

(c) $(Cf(x))' = C(f(x))$

(d) $(f(x)+g(x)) = f'(x)+g'(x)$ —

Note : les deux dernières propriétés prise ensemble forme une propriété appelée *linéarité* de la dérivée. Les limites et plusieurs autres constructions mathématiques étudiées au collégial on cette propriété de « linéarité », qui est le sujet d'étude central du cours d'algèbre *linéaire*.

Exemple 4.1.

- $(2)' = 0$, $(-3)' = 0$, $(0)' = 0$.
- $\left(x^3\right)' = 3x^2$, $\left(x^{10}\right)' = 10x^9$, $\left(x^{743}\right)' = 743x^{742}$, $(x^1)' = 1\cdot x^0 = 1$
- $\left(3x^5\right)' = 3\left(x^5\right)'$, $\left(10\sin(x)\right)' = 10\left(\sin(x)\right)'$
- $\left(-x^2+3x\right)' = \left(-x^2\right)' + \left(3x\right)'$, $\left(x^2-3x\right)' = \left(x^2+(-3x)\right)' = \left(x^2\right)' + \left(-3x\right)'$ —

Exemple 4.2. À l'aide des propriétés précédentes, on peut déterminer la dérivée d'une fonction polynômiale quelconque. Par exemple

$$\begin{aligned}
\left(3x^2-2x+4\right)' &= (3x^2)'-(2x)'+(4)' \\
&= 3(x^2)'-3(x)'+(4)' \\
&= 3(x^2)'-3(x)'+(4)' \\
&= 3(2x^1)-3(1)+(0) \\
&= 6x-3
\end{aligned}$$

Par la suite, nous ne donnerons pas autant de détails pour la dérivée des polynômes. La plupart du temps, nous donnerons directement le résultat.

On peut démontrer les propriétés données à partir de la définition de la dérivée.

Démonstration.

(a) Si $f(x)=C$, où $C \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque, alors

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{C-C}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

(b) Si $f(x)=x^n$, où $n \in \mathbb{N}$ est un nombre naturel strictement positif, alors

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x^n+nx^{n-1}h+\cdots+h^n)-x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{nx^{n-1}h+\cdots+h^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h(nx^{n-1}+\cdots+h^{n-1})}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} nx^{n-1}+\cdots+h^{n-1} \\
&= nx^{n-1}+(0)+\cdots+(0)^{n-1} \\
&= nx^{n-1}
\end{aligned}$$

(c) Si $f(x)$ est une fonction dérivable et $C \in \mathbb{R}$ une constante, alors

$$\begin{aligned}
\left(Cf(x)\right)' &= \lim_{h\to 0} \frac{Cf(x+h) - Cf(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{C(f(x+h) - f(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} C\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= C\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= Cf'(x)
\end{aligned}$$

(d) Si $f(x)$ et $g(x)$ sont deux fonctions dérivables, alors

$$\begin{aligned}
\left(f(x) + g(x)\right)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\left(f(x+h) + g(x+h)\right) - \left(f(x) + g(x)\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{((f(x+h) - f(x)) + (g(x+h)) - g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x) + g'(x)
\end{aligned}$$

□

4.2 Dérivée d'un produit et d'un quotient

Proposition 4.2. Si f est une fonction dérivable en x, alors

(a) $\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

(b) $\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)' = \dfrac{-1g'(x)}{(g(x))^2}$

(c) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

Exemple 4.3. En utilisant la propriété permettant de calculer la dérivée d'un produit, on trouve que

$$\begin{aligned}
\left((x^4+1)(x^6+1)\right)' &= (x^4+1)'(x^6+1) + (x^4+1)(x^6+1)' \\
&= (4x^3)(x^6+1) + (x^4+1)(6x^5) \\
&= (4x^9 + 4x^3) + (6x^9 + 6x^5) \\
&= 10x^9 + 6x^5 + 4x^3
\end{aligned}$$

Exemple 4.4. En utilisant la propriété permettant de calculer la dérivée d'un quotient, on trouve que

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{x^4+1}{x^6++1}\right)' &= \frac{(x^4+1)'(x^6+1)-(x^4+1)(x^6+1)'}{(x^6+1)^2}\\
&= \frac{4x^3(x^6+1)-(x^4+1)(6x^5)}{(x^6+1)^2}\\
&= \frac{(4x^9+4x^3)-(6x^9+6x^5)}{(x^6+1)^2}\\
&= \frac{-2x^9+6x^5+4x^3}{(x^6+1)^2}
\end{aligned}
$$

Démonstration. On suppose que f et g sont dérivables en x. Cela implique que f et g sont continues en x. Pour la dérivée du produit :

$$
\begin{aligned}
\big(f(x)g(x)\big)' &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)}{h}+\frac{f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+\lim_{h\to 0}f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\
&= f'(x)g(x+0)+f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\
&= f'(x)g(x+0)+f(x)g'(x)\\
&= f'(x)g(x)+f(x)g'(x)
\end{aligned}
$$

Pour la dérivée du quotient $\dfrac{1}{g(x)}$: on suppose g dérivable en x, donc continue en x.

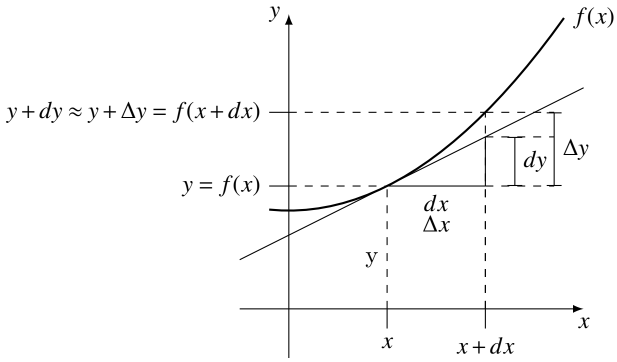
$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{g(x)}\right)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{g(x+h)}-\dfrac{1}{g(x)}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)g(x)}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}-\frac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)g(x)}\frac{1}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}-\frac{g(x)-g(x+h)}{h}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\\
&= \lim_{h\to 0}-\frac{g(x)-g(x+h)}{h}\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\\
&= -\lim_{h\to 0}\frac{g(x)-g(x+h)}{h}\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\\
&= -g'(x)\frac{1}{g(x+0)g(x)}\\
&= -\frac{g'(x)}{g(x)g(x)}\\
&= -\frac{g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}
\end{aligned}$$

Pour la dérivée du quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$: on suppose que f et g dérivable en x. On démontre le résultat directement en utilisant les deux résultats précédents.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \left(f(x)\frac{1}{g(x)}\right)'\\
&= f'(x)\frac{1}{g(x)}+f(x)\frac{-g'(x)}{(g(x))^2}\\
&= \frac{f'(x)}{g(x)}-\frac{f(x)g'(x)}{(g(x))^2}\\
&= \frac{f'(x)g(x)}{(g(x))^2}-\frac{f(x)g'(x)}{(g(x))^2}\\
&= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}
\end{aligned}$$

□

4.3 Différentielles



Approximation de Δy par dy si Δx est petit :

$$\Delta y \approx dy = f'(x)\,dx.$$

Pour mieux comprendre la notation $\frac{dy}{dx}$, on peut réécrire la définition de la fonction dérivée en utilisant Δx au lieu de h et Δy au lieu de $f(x+\Delta x) - f(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

On peut déterminer les formules de différentiation en utilisant la différentielle, un peu que l'on fait Leibniz et Euler : Si $y = x^2$, alors

$$\Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2 = \left(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2\right) - x^2.$$

Si $\Delta x \to 0$, alors ces dernières expressions deviennent

$$dy = (x+dx)^2 - x^2 = \left(x^2 + 2x\,dx + (dx)^2\right) - x^2 = 2x\,dx + (dx)^2.$$

Comme dx^2 est beaucoup plus petit que dx si dx est très petit, on peut le négliger « à la limite. » Il reste l'égalité

$$dy = 2x\,dx,$$

ce qui est la « formule de différentiation » de la fonction $y = x^2$.

Avec un raisonnement similaire à ce que nous avons fait pour démontrer que $(x^n)' = nx^{n-1}$, on peut montrer la formule de différentiation suivante : si $y = x^n$, alors

$$dy = nx^{n-1}dx.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\Delta(x^n) &= (x+\Delta x)^n - x^n \\ &= x^n + nx^{n-1}\Delta x + (\text{termes})\delta x^2 - x^n \\ &= nx^{n-1}\Delta x + (\text{termes})\Delta x^2 \\ &\approx nx^{n-1}\Delta x \text{ si } \Delta x \text{ très petit.}\end{aligned}$$

□

Notez que les limites sont utilisées de manière implicite dans ce raisonnement.

4.3.1 Propriétés de la dérivée à l'aide des différentielles

.

On peut exprimer les propriétés de la dérivée à l'aide des différentielles. Par exemple : si u et v sont des fonctions différentiables de x, on a que

Proposition 4.3.

a) $dC = 0dx$)

b) $d(Cu) = Cdu$ où C est une constante

c) $d(u+v) = du+dv$

d) $d(uv) = udv+vdu$

—

Démonstration.

a)

$$\begin{aligned}\Delta C &= C - C\\ &= 0\\ &= 0\Delta x\end{aligned}$$

Donc, à la limite, $dC = 0\,dx$.

b)

$$\begin{aligned}\Delta Cu &= C(u+\Delta u) - Cu\\ &= Cu + C\Delta - Cu\\ &= C\Delta u\end{aligned}$$

À la limite, $d(Cu) = C\,du$.

c)

$$\begin{aligned}\Delta(u+v) &= (u+\Delta u)+(v+\Delta v)-(u+v)\\ &= (u+v)+(\Delta u+\Delta v)-(u+v)\\ &= \Delta u+\Delta v\end{aligned}$$

□

À la limite $d(u+v) = du+dv$.

d)

$$\begin{aligned}\Delta(uv) &= (u+\Delta u)(v+\Delta v)-uv\\ &= uv+u\Delta v+v\Delta u+\Delta u\Delta v-uv\\ &= u\Delta v+v\Delta u+\Delta u\Delta v\end{aligned}$$

À la limite $d(uv) = udv+vdu$ (car $\Delta u\Delta v$ est toujours beaucoup plus petit que Δu ou Δv quand ces quantités sont assez petites.

4.4 Règle de chaîne

La « règle de dérivation en chaine », ou simplement « règle de chaine », qui permet de calculer la dérivée de composition de fonctions :

$$\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x))g'(x)$$

si f est dérivable en $g(x)$ et g est dérivable en x.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\big(f(g(x))\big)' &= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x+h)-g(x)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\
&= f'(g(x))g'(x)
\end{aligned}$$

□

On peut aussi formuler cette règle avec la notation différentielle : si $z = f(y)$ et $y = g(x)$, alors, si on considère z comme une fonction de x, sa dérivée est donnée par

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

Cette formulation correspond au truc utilisé pour dériver rapidement en utilisant la règle de chaine : elle dit précisément que la dérivée de z par rapport à x est la dérivée de z par rapport à l'« intérieur » fois la dérivée de l'« intérieur » par rapport à x.

Exemple 4.5. Soient $z = y^3$ et $y = \sqrt{x}$ deux fonctions. On aimerait connaitre le taux de variation de z par rapport à x. On utilise la règle de chaine. Noter que l'on veut le taux de variation en fonction de x. Il faut donc exprimer $\frac{dz}{dy}$ en fonction de x en substituant $\sqrt{x}$ pour y.

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dx} &= \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}\\
&= (3y^2)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\\
&= \left(3\left(\sqrt{x}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\\
&= (3x)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\\
&= \frac{3x}{2\sqrt{x}}\\
&= \frac{3\sqrt{x}}{2}
\end{aligned}$$

—

4.5 Dérivation implicite

Il est possible de définir une fonction par une équation. Par exemple :

$$y = \frac{1}{x} \qquad y = x^2$$

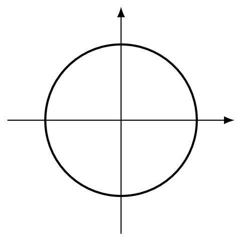
On pourrait aussi définir ces fonctions par les équations suivantes

$$xy = 1 \qquad x^2 - y = 0.$$

Dans une telle définition implicite, il faut cependant spécifier quelle variable est fonction de l'autre. Par habitude, nous prenons souvent y comme fonction de x.

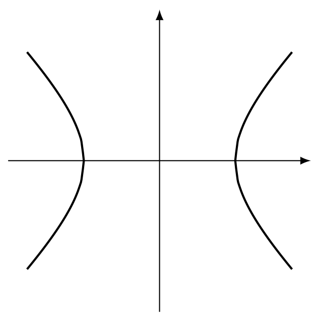
Nous savons cependant qu'une équation ne peut pas toujours être vue comme une définition implicite d'une fonction. Par exemple l'équation du cercle de rayon 1

$$x^2 + y^2 = 1$$



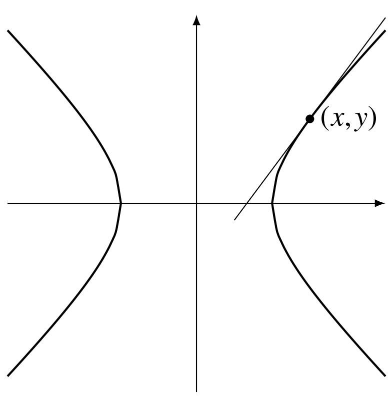
ou encore celle d'une hyperbole

$$x^2 - y^2 = 1$$



Même si ces équations établissent des relations entre les variables x et y sans que ces relations soient des fonctions, il est possible de déterminer la pente des tangentes à ces courbes à l'aide de la dérivée en supposant qu'il est possible *localement* de supposer que ces courbes sont le graphe d'une fonction définie implicitement.

Exemple 4.6. Prenons l'hyperbole définie par l'équation $x^2 - y^2 = 1$. On veut connaitre la pente de la tangente au point (x, y).



On suppose que « localement » y est une fonction de x, que l'on pourrait écrire comme $y = f(x)$.

Comme le point (x, y) est sur la courbe, on doit avoir que

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Si on considère chaque membre de cette égalité comme une fonction, on peut les dériver et ont obtient le même résultat :

$$\left(x^2 - y^2\right)' = \left(1\right)'.$$

$$2x - 2yy' = 0.$$

Notez le « y' » : c'est la « dérivée de l'intérieur » dans l'application de la règle de chaine. En effet, on pourrait écrire y^2 comme $(f(x))^2$ puisque $y = f(x)$. En dérivant sous cette forme avec la règle de chaine on obtient

$$\left((f(x))^2\right)' = 2f(x)f'(x).$$

Comme $2f(x)f'(x) = 2yy'$, on voit que la dérivée de y^2 *par rapport à* x est bien $2yy'$.

Enfin, on isole y' dans l'égalité $2x - 2yy' = 0$ pour obtenir une expression donnant la pente de la tangente en fonction des coordonnées x et y du point (x, y) :

$$y' = \frac{-2x}{-2y} = \frac{x}{y}$$

On peut utiliser ce résultat pour déterminer la pente de la tangente au point $(2, \sqrt{3})$. On vérifie que ce point est bien sur l'hyperbole :

$$2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 4 - 3 = 1.$$

(Si le point n'était pas sur l'hyperbole, l'hypothèse de départ de ce calcul serait fausse et la conclusion $y' = \frac{x}{y}$ le serait aussi !)

La pente de la tangente au point donné est donc

$$y' = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

—

4.5.1 Taux liés

La règle de chaine permet l'étude de taux de variation de variables liées entre elle par une relations, comme dans la section précédente.

Exemple 4.7. Imaginons un cercle dont le rayon r varie dans le temps. Si le rayon varie, l'aide du cercle doit varier elle aussi car les deux quantités sont reliés par l'équation

$$A = \pi r^2.$$

On a donc une situation où l'aire A est fonction du rayon r, lui-même fonction du temps. Pour connaitre le taux de variation de l'aire en fonction du temps, on utilise la règle de chaine :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr}\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

Si le taux de variation du rayon $\frac{dr}{dt}$ est de $55\,\mathrm{cm/s}$ et que le rayon du cercle est de 10 cm, le taux de variation de l'aire est

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r|_{r=10\,\mathrm{cm}}(5\,\mathrm{cm/s}) = 2\pi(10\,\mathrm{cm})(5\,\mathrm{cm/s}) = 100\pi\,\mathrm{cm^2/s} \approx 314.16\,\mathrm{cm^2/s}.$$

Notons que pour le taux de variation du rayon $\frac{dr}{dt}$ est de $55\,\mathrm{cm/s}$ et que le rayon du cercle est différent, par exemple de 100 cm, le taux de variation de l'aire est

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r|_{r=100\,\mathrm{cm}}(5\,\mathrm{cm/s}) = 2\pi(100\,\mathrm{cm})(5\,\mathrm{cm/s}) = 1000\pi\,\mathrm{cm^2/s} \approx 3141.59\,\mathrm{cm^2/s}$$

On voit que le taux de variation de l'aire dépend du rayon du cercle. On explique cela géométriquement par le fait que pour un petit certle, un accroissement de son rayon de 5 cm aura un grand effet sur l'aire, alors que pour un grand cercle, un même accroissement du rayon aura peu d'effet sur l'aire. —

4.6 Dérivée d'ordre supérieur

Le « taux de changements du taux de changement » est une autre quantitée importante pouvant nous donner de l'information sur le comportement d'une fonction. En dynamique, elle correspond à l'**accélération**, qui est le taux de changement de la vitesse, elle même le taux de changement de la position.

Comme le taux de changement d'une fonction un point de son graphe est donnée par la dérivée de la fonction, le taux de changement du taux de changement est donnée par la *dérivée de la dérivée*. On peut voir la dérivée d'une fonction comme une nouvelle fonction, que l'on peut dériver elle aussi.

Par exemple, si on prend $f(x) = x^3$, le taux de changement est donnée par $f'(x) = 3x2$. Le taux de changement de f' est donc donné par la **dérivée seconde** $f''(x) = 6x$.

Définition 4.1. On appelle **dérivée seconde** d'une fonction la dérivée de sa dérivée, que l'on dénote par

$$f''(x) \stackrel{\text{def}}{=} (f'(x))'$$

On défini de manière similaire la **dérivée troisième** $f'''(x)$, la **dérivée quatrième** $f''''(x)$, etc.

On appelle ces dérivées les **dérivées d'ordre supérieur**. —

Exemple 4.8. Calculer la dérivée troisième de $f(x) = \sqrt{x}$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x} \\
f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
f''(x) &= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{2}\left(x^{-1/2}\right)' = -\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)x^{-3/2} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \\
f'''(x) &= \left(-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}\right)' = -\frac{1}{4}\left(x^{-3/2}\right)' = -\frac{1}{4}\left(\frac{-3}{2}\right)x^{-5/2} = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}
\end{aligned}$$

—

Comme on peut répéter la dérivation autant de fois que l'on veut, l'accumulation de « ' » peut alourdir la notation. Il est plus pratique d'avoir une notation qui indique plus simplement le nombre de fois qu'une fonction est dérivée.
Définition 4.2.

$$\begin{aligned}
\text{Dérivée première :}\quad & f^{(1)}(x) \overset{\text{def}}{=} f'(x) \\
\text{Dérivée seconde :}\quad & f^{(2)}(x) \overset{\text{def}}{=} f''(x) = (f'(x))' \\
\text{Dérivée troisième :}\quad & f^{(3)}(x) \overset{\text{def}}{=} f'''(x) = \left(f^{(2)}(x)\right)' \\
\text{Dérivée quatrième :}\quad & f^{(4)}(x) \overset{\text{def}}{=} f''''(x) = \left(f^{(3)}(x)\right)' \\
\text{Dérivée cinquième :}\quad & f^{(5)}(x) \overset{\text{def}}{=} \left(f^{(4)}(x)\right)' \\
& \vdots \\
\text{Dérivée } n\text{-ième :}\quad & f^{(n)}(x) \overset{\text{def}}{=} \left(f^{(n-1)}(x)\right)'
\end{aligned}$$

La dérivée d'ordre quelconque $f^{(n)}$ est appelée **dérivée n-ième**.

Par convention, la « dérivée 0-ieme » est la fonction elle même.

$$f^{(0)}(x) = f(x).$$

Les dérivées d'ordre supérieur ont une notation dans toute les variantes de la notation pour la dérivée. Le tableau suivant offre un panorama de ces notations.

Notations pour la dérivée seconde						
$f''(x)$	$f^{(2)}(x)$	y''	$\left(x^2\right)''$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	$\frac{d^2f(x)}{dx^2}$	$\frac{d^2x^2}{dx^2}$
$f''(a)$	$f^{(2)}(a)$	$y''\vert_{x=a}$	$\left(x^2\right)''\Big\vert_{x=a}$	$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right\vert_{x=a}$	$\left.\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right\vert_{x=a}$	$\left.\frac{d^2x^2}{dx^2}\right\vert_{x=a}$