

Formulaire algèbre

Priorité des opérations

- 1) Parenthèses
- 2) Exposants et racines
- 3) Produits et divisions, de gauche à droite
- 4) Addition et soustractions, de gauche à droite

Propriétés des opérations élémentaires

$A + B = B + A$	(Commutativité de +)
$A + (B + C) = (A + B) + C$	(Associativité de +)
$0 + A = A + 0 = A$	(0 est neutre pour +)
$A + (-A) = (-A) + A = 0$	(inverse pour +)
$AB = BA$	(Commutativité ×)
$0A = 0A = 0$	(0 est absorbant pour ×)
$AB = 0 \implies A = 0 \text{ ou } B = 0$	(produit nul)
$1A = A1 = A$	(1 est neutre pour ×)
$\frac{1}{A} = \frac{1}{A} = 1$	(inverse pour ×)
$A(B + C) = AB + AC$	(distributivité de × sur +)

Propriété des fractions

$\frac{1}{A}$ non défini pour $A = 0$	(Division par zéro)
$A \frac{1}{B} = \frac{A}{B} = \frac{1}{\frac{B}{A}}$	(Notation fractionnaire)
$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \iff AD = BC$	(Égalité de fractions)
$\frac{1}{1/A} = A$	(Inverse de l'inverse)
$\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B}$	(Facteur commun)
$\frac{A}{B} + \frac{C}{B} = \frac{A+C}{B}$	(Somme, même déno.)
$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD+CB}{BD}$	(Somme, déno. commun)
$\frac{AC}{BD} = \frac{AC}{BD}$	(produit)
$\frac{A/B}{C/D} = \frac{AD}{BC}$	(division)

Exposants et racines

$A^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{A \cdot A \cdots A \cdot A}_{n \text{ fois}}$	(définition)
$A^n A^m = A^{n+m}$	(produit de puissances)
$(A^n)^m = A^{nm}$	(puissance de puissance)
$A^0 = 1$	(exposant zéro)
$A^{-n} = \frac{1}{A^n}$	(inverse de puissance)

$\sqrt[n]{A}$ est défini si n impair, ou si n pair et $A \geq 0$

$A^{1/n} = \sqrt[n]{A}$	(puissance fractionnaire)
$(AB)^n = A^n B^n$	(puissance d'un produit)
$\sqrt[n]{AB} = \sqrt[n]{A} \sqrt[n]{B}$	(racine d'un produit)
$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}$	(puissance d'un quotient)
$\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}$	(racine d'un quotient)
$\sqrt[n]{A} = A$ si $A \geq 0$	$\sqrt[n]{A^n} = \begin{cases} A & \text{si } n \text{ pair} \\ A & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

Exposants et logarithmes

$\log_b(A) = B \iff b^B = A$	(définition de logarithme)
$\log_b(b^A) = A$	(logarithme d'une puissance est l'exposant)
$b^{\log_b(A)} = A$	(puissance du logarithme est la base)
$\log_b(1) = 0$	(logarithme de l'unité est zéro)
$\log_b(AB) = \log_b(A) + \log_b(B)$	(logarithme d'un produit)
$\log_b(A^B) = B \log_b(A)$	(logarithme d'une puissance)
$\log_b(A) = \frac{\log_c(A)}{\log_c(b)}$	(changement de base)

Identités algébriques fréquemment utilisées

$AB + AC = A(B + C)$	(mise en évidence simple)
$AC + AD + BC + BD = (A + B)(C + D)$	(mise en évidence double)
$\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$	(rationalisation)
$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$	(différence de carrés)
$(\sqrt{A} \pm \sqrt{B})(\sqrt{A} \mp \sqrt{B}) = A - B$	(conjugué)
$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$	(différence de cubes)
$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$	(binôme carré parfait)
$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$	(développement du binôme degré 3)
$(A + B)^4 = A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4$	(développement du binôme degré 4)

Coefficients du développement d'un binôme de degré quelconque :

Triangle de Pascal								
$(A+B)^0$		1						
$(A+B)^1$		1	1					
$(A+B)^2$		1	2	1				
$(A+B)^3$		1	3	3	1			
$(A+B)^4$		1	4	6	4	1		
$(A+B)^5$		1	5	10	10	5	1	
$(A+B)^6$		1	6	15	20	15	6	1
⋮			⋮					

Résolution d'équations

Principes généraux

(Transitivité) $A = B$ et $B = C$ alors $A = C$.

(Application d'une opération) Si $f(x)$ est une opération (fonction), on a que

$$A = B \implies f(A) = f(B).$$

Si f est une opération inversible, alors $A = B \iff f(A) = f(B)$.

Si $f^{-1}(x)$ est l'opération inverse de $f(x)$, alors

$$f(A) = B \iff A = f^{-1}(B).$$

(Substitution) si $A(x) = B(x)$ alors $A(C) = B(C)$, où C est une expression algébrique quelconque substituée à la place de la variable x .

Autres principes fréquemment utilisés

$$\frac{A}{B} = 0 \iff A = 0 \text{ et } B \neq 0$$

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \iff AD = BC \text{ et } B, D \neq 0$$

Opérations inverses usuelles

$$A + C = B \iff A = B - C$$

$$CA = B \iff A = \frac{1}{C}B \text{ si } C \neq 0.$$

$$A^n = B \iff A = \pm \sqrt[n]{B} \text{ si } n \text{ pair.}$$

$$A^n = B \iff A = \sqrt[n]{B} \text{ si } n \text{ impair.}$$

$$b^A = B \iff \log_b(B) = A \text{ si } B > 0.$$

$$\sin(A) = B \iff A = \arcsin(B) \text{ si } -\frac{\pi}{2} \leq A \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\cos(A) = B \iff A = \arccos(B) \text{ si } 0 \leq A \leq \pi$$

$$\tan(A) = B \iff A = \arctan(B) \text{ si } -\frac{\pi}{2} < A < \frac{\pi}{2}$$

Zéros de polynômes

Forme factorisée

Un polynôme factorisé comme

$$P(x) = c(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$$

a comme zéros a_1, a_2, \dots, a_n .

Division polynomiale avec reste

Soit $P(x)$ et $D(x)$ des polynômes en x . On peut toujours trouver des polynômes $Q(x)$ (le quotient) et $R(x)$ (le reste), avec $\deg(R(x)) < \deg(Q(x))$ tels que

$$P(x) = D(x)Q(x) + R(x)$$

On peut écrire sous forme fractionnaire :

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}.$$

Exemple

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 + 3x - 4 \quad | \quad x^2 - 1 \\ \underline{x^3 - x} \\ -x^2 + 4x - 4 \\ \underline{-x^2 + 1} \\ 4x - 3 \end{array}$$

$$x^3 - x^2 + 3x - 4 = (x - 1)(x^2 - 1) + (4x - 3)$$

$$\frac{x^3 - x^2 + 3x - 4}{x - 1} = (x^2 - 1) + \frac{4x - 3}{x - 1}$$

Équations quadratiques

Formule quadratique :

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Identités utiles pour le passage entre les différentes formes d'une équation quadratique :

Si u et v sont les zéros du polynôme $ax^2 + bx + c$,

$$\text{on a que } ax^2 + bx + c = a(x - u)(x - v)$$

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

(Factorisation produit-somme)

$$A^2 + 2bA = A^2 + 2bA + b^2 - b^2 = (A + b)^2 - b^2$$

(Complétion de carrés)

Théorèmes de factorisation

Théorème 1. Soit $P(x)$ un polynôme. La valeur a est un zéro de $P(x)$ si et seulement si $(x - a)$ est un facteur de $P(x)$:

$$P(a) = 0 \iff P(x) = (x - a)Q(x).$$

Théorème 2. Les polynômes réels irréductibles sont de l'une des deux formes suivantes :

degré 1 de la forme $c(x - a)$ (a est nécessairement un zéro)

degré 2 de la forme $ax^2 + bx + c$, où $b^2 - 4ac < 0$. (polynôme de degré deux sans zéros).

Théorème 3 (Théorème fondamental de l'algèbre). Tout polynôme réel peut s'écrire comme un produit d'une constante et de polynômes irréductibles, unique à l'ordre des facteurs près.