Études complètes de fonctions

Pour chacune des fonctions suivantes, faire une étude complète de la fonction $f(x)$ donnant tous les éléments suivants :

- domaine et signe de $f(s)$;
- croissance de $f(x)$ et minimum/maximum relatifs ;
- concavité de $f(x)$ et points d'inflexion ;
- asymptote de $f(x)$;
- esquisse du graphe de $f(x)$.

a) $f(x) = 2x(4-x)^3$

b) $f(x) = x^3 + \dfrac{3}{x}$

c) $f(x) = \dfrac{-x^2}{x^2+1}$

d) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x}$

e) $y = (x-3)\sqrt{9+x}$

f) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$

g) $f(x) = (5-x)^{\frac{2}{3}} + 3$

h) $f(x) = \sqrt[3]{5-x} + 3$

i) $f(x) = \dfrac{2x^2-8}{x^2-1}$

j) $y = (x-2)^2 + \dfrac{1}{(x-2)^2}$

k) $f(x) = \dfrac{-2x}{\sqrt{x^2-1}}$

l) $f(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}}(x-6)$

Solutions

a) Signe de $f(x) = 2x(4-x)^3$ $\qquad D_f = \mathbb{R}$

x		0		4		
f	-	0	+	0	-	

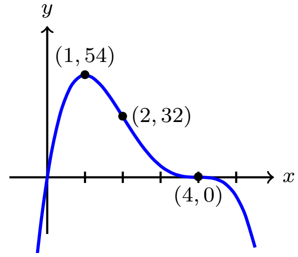
Croissance de $f(x)$ avec $f'(x) = 8(4-x)^2(1-x)$

x		1		4	
f'	+	0	-	0	-
f	$\nearrow$	Max	$\searrow$	0	$\searrow$

Concavité de $f(x)$ avec $f''(x) = -24(4-x)(2-x)$

x		2		4	
f''	-	0	+	0	-
f	$\frown$	P.I	$\smile$	P.I	$\frown$

Aucune asymptote.



Maximum relatif en $(1, 54)$;
Aucun minimum relatif ;
Points d'inflexion en $(2, 32)$ et $(4, 0)$.

b) Signe de $f(x) = x^3 + \dfrac{3}{x}$; $\qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

x		0	
f	-	$\nexists$	+

Croissance de $f(x)$ avec $f'(x) = \dfrac{3(x^4-1)}{x^2}$

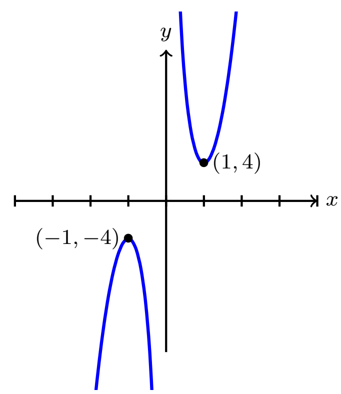
x		-1		0		1	
f'	+	0	-	$\nexists$	-	0	+
f	$\nearrow$	Max	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	Min	$\searrow$

Concavité de $f(x)$ avec $f''(x) = \dfrac{6(x^4+1)}{x^3}$

x		0	
f''	-	$\nexists$	+
f	$\frown$	$\nexists$	$\smile$

A.V. en $x = 0$ car $\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \dfrac{3}{0^\pm} = \pm\infty$;

Aucune A.H. car $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$;



Maximum relatif en $(1, 4)$;
Minimum relatif en $(-1, -4)$;
Aucun point d'inflexion.

c) Signe de $f(x) = \dfrac{-x^2}{x^2+1}$ $\qquad D_f = \mathbb{R}$

x		0	
f	-	0	-

Croissance de $f(x)$ avec $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

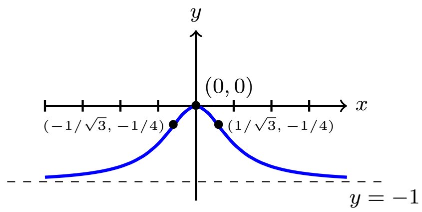
x		0	
f'	+	0	-
f	$\nearrow$	Max	$\searrow$

Concavité de $f(x)$ avec $f''(x) = \dfrac{-2(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}$

x		$-1/\sqrt{3}$		$1/\sqrt{3}$	
f''	+	0	-	0	+
f	$\smile$	P.I	$\frown$	P.I	$\smile$

Aucune A.V.

A.H. en $y = -1$ car $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x^2}{x^2+1} = -1$;



Maximum relatif en $(0,0)$;
Aucun minimum relatif ;
Points d'inflexion en $(-1/\sqrt{3}, -1/4)$ et $(1/\sqrt{3}, -1/4)$

d) Signe de $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x}$ $\qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

x		-1		0	
f	+	0	-	∄	+

Croissance de $f(x)$ avec $f'(x) = \dfrac{2x^3-1}{x^2}$

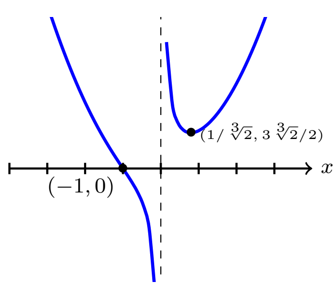
x		0		$1/\sqrt[3]{2}$	
f'	-	∄	-	0	+
f	↘	∄	↘	Min	↗

Concavité de $f(x)$ avec $f''(x) = \dfrac{2(x^3+1)}{x^3}$

x		-1		0	
f''	+	0	-	∄	+
f	$\smile$	P.I	$\frown$	∄	$\smile$

A.V. en $x = 0$ car $\displaystyle\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \frac{1}{0} = \pm\infty$;

Aucune A.H.



Aucun maximum relatif ;
Minimum relatif en $(1/\sqrt[3]{2}, 3\sqrt[3]{2}/2)$;
Points d'inflexion en $(-1,0)$

e) Signe de $f(x) = (x-3)\sqrt{9+x}$ $\qquad D_f = [-9, +\infty$

x	-9		3	$+\infty$
f	0	-	0	+

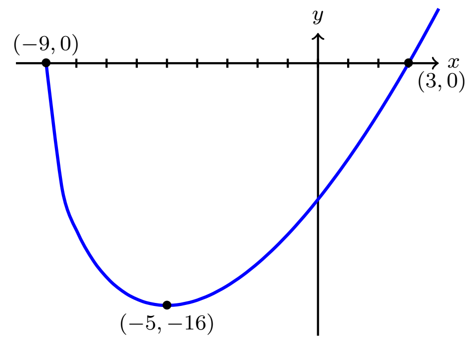
Croissance de $f(x)$ avec $f'(x) = \dfrac{3(x+5)}{2\sqrt{9+x}}$

x	-9		-5	
f'	∄	-	0	+
f	Max	↘	Min	↗

Concavité de $f(x)$ avec $f''(x) = \dfrac{3(x+13)}{4\sqrt{(9+x)^3}}$

Toujours concave vers le haut car $f'' > 0 \quad \forall x \in D_f$

Aucune A.V. et aucune A.H.



Maximum relatif en $(-9,0)$;
Minimum relatif en $(-5,-16)$;
Aucun point d'inflexion.

f) Signe de $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$ $\qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

x		-2		0		2	
f	-	∄	+	0	-	∄	+

Croissance de $f(x)$ avec $f'(x) = \dfrac{-(x^2+4)}{(x^2-4)^2} < 0$

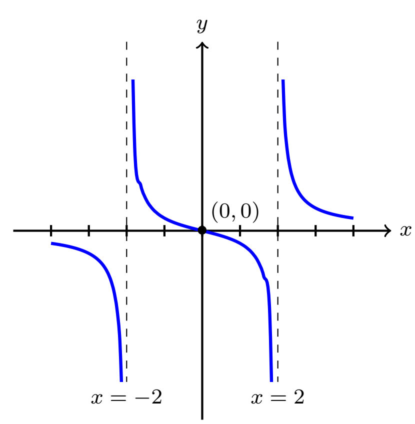
On remarque que $f(x)$ est décroissante, si $x \in D_f$.

Concavité de $f(x)$ avec $f''(x) = \dfrac{2x(2x^2+12)}{(x^2-4)^4}$

x		-2		0		2	
f''	-	∄	+	0	-	∄	+
f	$\frown$	A.V.	$\smile$	P.I	$\frown$	A.V.	$\smile$

A.V. en $x = \pm 2$ car $\displaystyle\lim_{x\to\pm 2} \frac{x}{x^2-4} = \frac{\pm 2}{0} = \pm\infty$;

A.H. en $y = 0$ car $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2-4} = 0$;



Aucun maximum relatif;
Aucun minimum relatif;
Point d'inflexion en $(0,0)$.

g) Signe de $f(x) = (5-x)^{2/3} + 3$ $\qquad D_f = \mathbb{R}$

On remarque que $f(x)$ est toujours positive.

Croissance de $f(x)$ avec $f'(x) = \dfrac{-2}{3\sqrt[3]{5-x}}$

x	$-\infty$	5	$+\infty$
f'	-	$\nexists$	+
f	$\searrow$	Min	$\nearrow$

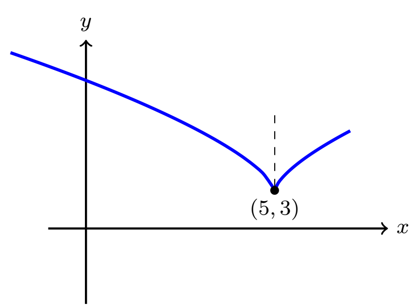
On conclut que $f(x)$ a un pic (la tangente est verticale) en $x = 5$, puisque

$$f'(5) = \frac{-2}{0} = \pm\infty$$

Concavité de $f(x)$ avec $f''(x) = \dfrac{-2}{9\sqrt[3]{(5-x)^4}} < 0$

On remarque que $f(x)$ est concave vers le bas si $x \neq 5$.

Aucune A.V. et aucune A.H.



Aucun maximum relatif;
Minimum relatif en $(5,3)$;
Aucun point d'inflexion

h) Signe de $f(x) = \sqrt[3]{5-x} + 3 > 0$ $\qquad D_f = \mathbb{R}$

x		32	
f	+	0	-

Croissance de $f(x)$ avec $f'(x) = \dfrac{-1}{3\sqrt[3]{(5-x)^2}} < 0$

x		5	
f'	-	$\nexists$	-
f	$\searrow$	? ?	$\searrow$

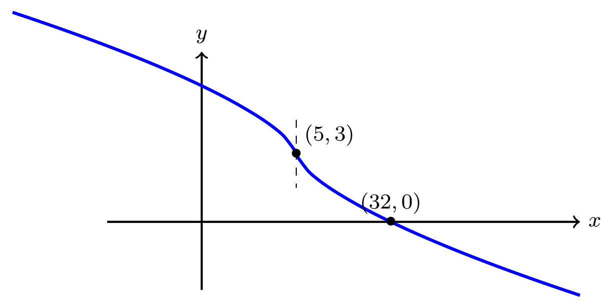
On conclut que la tangente est verticale en $x = 5$, puisque $f(x)$ est décroissante (aucun pic) et

$$f'(5) = \frac{-1}{0} = \pm\infty$$

Concavité de $f(x)$ avec $f''(x) = \dfrac{-2}{9\sqrt[3]{(5-x)^5}}$

x		5	
f''	-	$\nexists$	+
f	$\frown$	P.I	$\smile$

Aucune A.V. et aucune A.H.



Aucun maximum relatif;
Aucun minimum relatif;
Point d'inflexion en $(5,3)$

i) Signe de $f(x) = \dfrac{2x^2-8}{x^2-1}$ $\qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

x		-2		-1		1		2	
f	+	0	-	$\nexists$	+	$\nexists$	-	0	+

Croissance de $f(x)$ avec $f'(x) = \dfrac{12x}{(x^2-1)^2}$

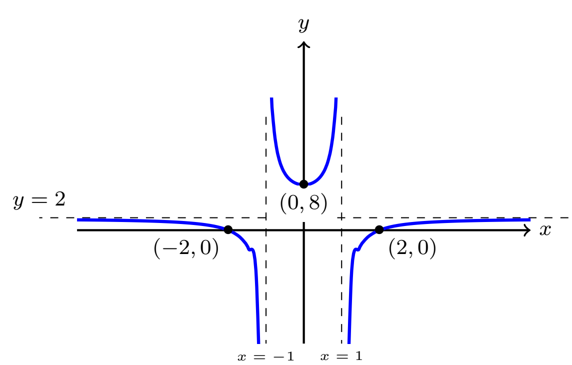
x		-1		0		1	
f'	-	$\nexists$	-	0	+	$\nexists$	+
f	$\searrow$	A.V.	$\searrow$	Min	$\nearrow$	A.V.	$\nearrow$

Concavité de $f(x)$ avec $f''(x) = \dfrac{-12(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}$

x		-1		1	
f''	-	$\nexists$	+	$\nexists$	-
f	$\frown$	A.V.	$\smile$	A.V.	$\frown$

A.V. en $x = \pm 1$ car, $\quad \displaystyle\lim_{x\to\pm 1} \frac{2x^2-1}{x^2-1} = \frac{-6}{0} = \pm\infty.$

A.H. en $y = 2$ car, $\quad \displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2-1}{x^2-1} = 2.$



Aucun maximum relatif;
Minimum relatif en $(0,8)$;
Aucun point d'inflexion.

j) Signe de $f(x) = (x-2)^2 + \dfrac{1}{(x-2)^2} > 0,$
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

On remarque que $f(x)$ est positive si $x \neq 2$.

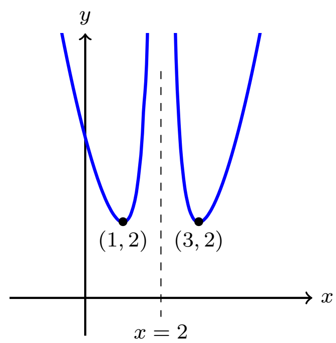
Croissance de $f(x)$ avec $f'(x) = 2(x-2) - \dfrac{2}{(x-2)^3}$

x		1		2		3	
f'	-	0	+	$\nexists$	-	0	+
f	$\searrow$	Min	$\nearrow$	$\nexists$	$\searrow$	Min	$\nearrow$

Concavité de $f(x)$ avec $f''(x) = 2 + \dfrac{6}{(x-2)^4}$

On conclut que $f(x)$ est concave vers le haut si $x \neq 0$.
A.V. en $x = 2$, car

$$\lim_{x\to 2} (x-2)^2 + \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{1}{0} = \pm\infty$$



Aucun maximum relatif ;
Minimum relatif en $(1, 2)$ et $(3, 2)$;
Aucun point d'inflexion.

k) Signe de $f(x) = \dfrac{-2x}{\sqrt{x^2-1}}$

On a $\quad D_f = -\infty, -1[\cap]1, +\infty$

x		-1		1	
f	+	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	-

Croissance de $f(x)$ avec $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$

x		-1		1	
f'	+	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	+
f	$\nearrow$	A.V.	$\nexists$	A.V.	$\nearrow$

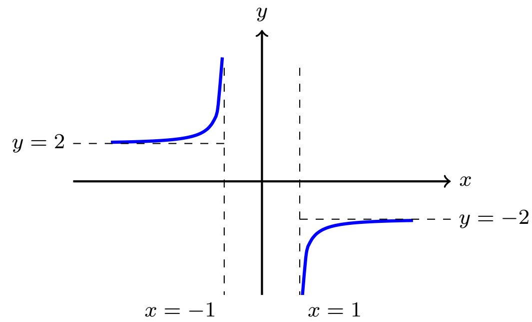
Concavité de $f(x)$ avec $f''(x) = \dfrac{-6x)}{\sqrt{(x^2-1)^5}}$

x		-1		1	
f''	-	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	+
f	$\frown$	A.V.	$\nexists$	A.V.	$\smile$

A.V. en $x = \pm 1$ car, $\quad \displaystyle\lim_{x\to\pm 1} \frac{-2x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\pm 1}{0} = \pm\infty.$

A.H. en $y = 2$ si $x \to -\infty$ et
A.H. en $y = -2$ si $x \to +\infty$ car,

$$\sqrt{x^2-1} \approx |x|, \quad \text{lorsque } x \text{ est grand.}$$



Aucun maximum relatif ;
Aucun minimum relatif ;
Aucun point d'inflexion.

l) Signe de $f(x) = (x-2)^{2/3}(x-6), \quad D_f = \mathbb{R}$

x		1		6	
f	-	0	-	0	+

Croissance de $f(x)$ avec $f'(x) = \dfrac{5(x-3)}{3\sqrt[3]{x-1}}$

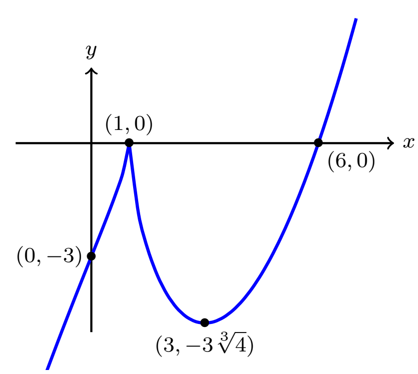
x		1		3	
f'	+	$\nexists$	-	0	+
f	$\nearrow$	Max	$\searrow$	Min	$\nearrow$

On conclut que $f(x)$ a un pic en $x = 1$ (la tangente est verticale), puisque
$f'(1)$ n'existe pas bien que $1 \in D_f$.

Concavité de $f(x)$ avec $f''(x) = \dfrac{10x}{9\sqrt[3]{(x-1)^4}}$

x		0		1	
f'	-	0	+	$\nexists$	+
f	$\frown$	P.I.	$\smile$	? ?	$\smile$

Aucune asymptote



Maximum relatif en $(1, 0)$;
Minimum relatif en $(3, -3\sqrt[3]{4})$;
Point d'inflexion en $(0, -3)$.