Exercices 1 — algèbre et fonctions

Calcul différentiel – Automne 2017 – Yannick Delbecque

Notation, logique, nombres

Question 1
Donner la contraposée des énoncés suivants.

a) « si $x \in \mathbb{Z}$, alors $x \in \mathbb{Q}$ »

b) « Si une fonction f est continue en $x = a$, alors $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. »

c) « Quand la fenêtre est ouverte, la pluie entre dans le salon. »

d) « Si X est humain, alors X est mortel. »

e) « Tous les fruits sont des légumes. »

f) « Si $n \in \mathbb{N}$ est pair, alors $n+1$ est impair. »

Question 2
Mettre les nombres périodiques $0.\overline{123}$ et $2.\overline{18}$ sous forme de fractions.

Question 3
Démontrer que $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre rationnel en utilisant le lemme suivant (qu'il n'est pas nécessaire de prouver) :

n est un multiple de 3 ssi n^2 est un multiple de trois.

Indice : s'inspirer de la preuve vue en classe pour $\sqrt{2}$.

Question 4
(Défi difficile) Démontrer que $\log_2 3$ n'est pas un nombre rationnel en utilisant le fait que la décomposition en facteurs premiers est unique. Indice : s'inspirer (un peu moins) de la preuve vue en classe pour $\sqrt{2}$.

Droites

Question 5
Déterminer la pente et l'ordonnée à l'origine de la droite d'équation $3x + 2y = 1$.

Question 6
Donner l'équation de la droite…

a) de pente -5 qui passe par le point $(-3, 4)$;

b) passant par les points $(-2, 4)$ et $(1, -5)$;

c) parallèle à la droite trouvée en a) qui passe par le point $(1, -2)$.

Quadratiques

Question 7
Trouver les zéros de chacune des fonctions polynomiales ci-dessous en factorisant.

a) $f(x) = x^2 + 7x + 12$

b) $f(x) = 9 - 4x^2$

c) $f(x) = 3x^2 + 5x$

d) $f(x) = -x^2 - 100$

Question 8
Utiliser la formule quadratique pour trouver les zéros de chacune des fonctions suivantes.

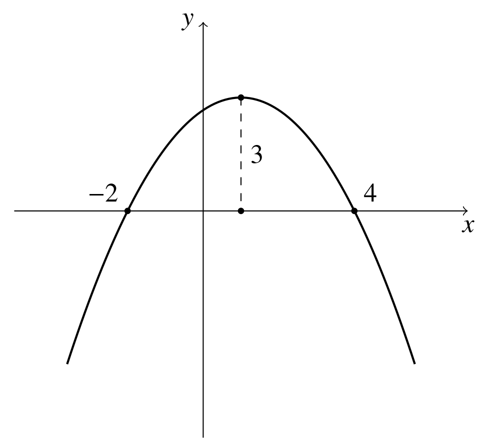
a) $f(x) = -3x^2 + 2x - 6$

b) $f(x) = 6x^2 - 17x + 12$

c) $f(x) = x^2 + 11$

d) $f(x) = 9x^2 - 6x + 1$

Question 9
Déterminer quelle fonction quadratique de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ est illustrée dans le graphe suivant.



Polynômes

Question 10
Factoriser complètement les polynômes suivants.

a) $4x^3 - 3x^2 + 4x - 3$

b) $x^2 + 5x + 6$

c) $9x^2 + 12x + 4$

d) $16x^2 - 81$

e) $x^2 + 25$

f) $3x^3 - 108x$

g) $18x^5 + 32x^3$

h) $x^4 - 5x^2 + 4$

Question 11
Trouver les zéros des fonctions polynomiales suivantes.

a) $f(x) = 4x - 3$

b) $f(x) = 2$

c) $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$

d) $f(x) = (x-1)(x+1)$

e) $f(x) = x(x-1)\left(x + \sqrt{2}\right)$

f) $f(x) = \dfrac{(x-2)(x+1)}{x^2+3}$

Question 12
Effectuer les divisions polynomiales suivantes.

a) $\dfrac{x^2-1}{x-1}$

b) $\dfrac{x^2-1}{x+1}$

c) $\dfrac{x^2+1}{x-1}$

d) $\dfrac{x^3-1}{x-1}$

e) $\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

f) $\dfrac{x^4-x^3-2x^2+3x-1}{x-1}$

g) $\dfrac{x^5+x^4+2x^3+2x^2+x+2}{x+1}$

Question 13
Le polynôme $P(x) = x^3-4x^2+3x-15$ peut également s'écrire de la manière suivante.

$$P(x) = (x-3)\left(x^2-x+5\right)$$

a) Peut-on le factoriser davantage ? Expliquer.

b) Vérifier que $x = 3$ est un zéro de $P(x)$ dans les deux formes données dans la question.

c) Trouver, s'il y en a, d'autres valeurs de x pour lesquelles $P(x) = 0$.

Question 14
Soit le polynôme $P(x) = x^4-5x^3-8x^2-24$.

a) Sans effectuer de division, dire si $(x-2)$ est un facteur de $P(x)$.

b) Est-ce que $(x+2)$ divise $P(x)$?

Question 15
Soit le polynôme $P(x) = x^4+3x^2+2$.

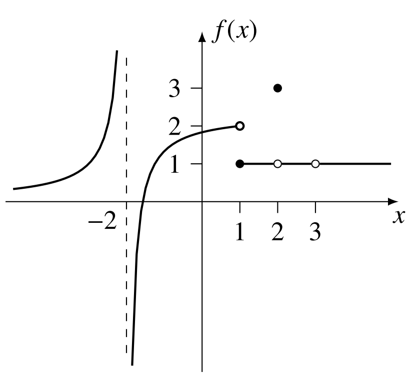
a) Ce polynôme a-t-il des zéros ?

b) Existe-t-il une factorisation pour de $P(x)$?

c) Cela contredit-il le théorème de factorisation ? Expliquer.

Fonctions

Question 16
Soit f la fonction ayant le graphe suivant. Évaluer f pour les valeurs de x données.



a) $x = -2$

b) $x = 1$

c) $x = 3/2$

d) $x = 2$

e) $x = 3$

f) $x = \pi$

Question 17
Évaluer…

a) $f(3)$ si $f(x) = x^3$

b) $f(1)$ si $f(x) = x^{3/2}$

c) $f(9)$ si $f(x) = x^{3/2}$

d) $f\left(\sqrt[3]{2}\right)$ si $f(x) = x^{3/2}$

e) $f(2)$ si $f(x) = 2^{2/3}x^{1/3}$

f) $f(1+h)$ si $f(x) = x^2$

g) $f(3+h)$ si $f(x) = x^3$

h) $f(y)$ si $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

i) $f(y+h)$ si $f(x) = \frac{1}{x}$

j) $f(1)$ si $f(x) = x^{5/2}$

k) $f(x+h)$ si $f(x) = x^{5/2}$

l) $f(2)$ si $f(x) = \log(x-1)$

m) $f(0)$ si $f(x) = 2^{(x-1)}$

n) $f(-1)$ si $f(x) = \frac{1}{x+1}$

o) $f(1)$ si $f(x) = 2^{(x-1)}$

Question 18
Considérons les fonctions définie par $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2$ et $h(x) = \frac{1}{x+1}$. Évaluer les expressions suivantes.

a) $3f(x)-5$

b) $f(3x-5)$

c) $f(x)+h(x)$

d) $f(x)g(x)$

e) $f(g(x))$

f) $g(f(x))$

g) $[f\circ g\circ h](x)$

h) $[h\circ g\circ f](x)$

i) $[g\circ h\circ f](x)$

Question 19
Soit la fonction définie par $f(x) = x^3-4x$.

a) Donner l'équation de la droite passant par $(-1, f(-1))$ et $(2, f(2))$

b) Vérifier que le point $(1,-3)$ sont sur le graphe de f

c) Donner l'équation de la droite passant par $(1,-3)$ et $(2, f(2))$

Question 20
Faire une esquisse du graphe des fonctions suivantes.

a) $f(x) = (x-2)^2+1$

b) $f(x) = \frac{1}{x+2}-1$

c) $f(x) = -\left(x+\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{2}$

d) $f(x) = \sqrt{x+1}-1$

Question 21
Déterminer lesquelles des équations suivantes définissent des fonctions si on considère x comme variable indépendante et y comme variable dépendante. Si l'équation donnée défini une fonction, donner la règle de correspondance et son domaine de définition.

a) $yx = 1$

b) $x+y = 1$

c) $x^2+y^2 = 1$

d) $x^3+y^3 = 0$

e) $2^x = y^2$

f) $2^y = x^2$

g) $2x^2-y+8 = 3x$

h) $\dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{x^2}$

i) $\sin(y) = x$

j) $\sin(x) = 3y+2$

Question 22
Soit f la fonction définie de la manière suivante.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < -2 \\ -x & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

a) Évaluer $f(-3)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(1/2)$, $f(1)$, $f(2)$.

b) Quel est le domaine de f ?

Question 23
Soit f la fonction définie de la manière suivante.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } x \leq 2 \\ x & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

a) Évaluer $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$.

b) Quel est le domaine de f ?

Question 24
La fonction *valeur absolue* est la fonction définie de la manière suivante.

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$

a) Évaluer $|-3|$, $|0|$, $|2|$.

b) Quel est le domaine de la fonction valeur absolue ?

c) Est-ce que la fonction valeur absolue admet une fonction inverse ?

d) Montrer que $|x| = \sqrt{x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

e) Montrer que $|ab| = |a||b|$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$. (Ind. Utiliser le résultat précédent).

Question 25
La *distance* $d(x_1, x_2)$ entre x_1 et x_1 sur la droite réelle peut être définie par

$$d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|.$$

Utiliser cette idée de distance pour déterminer quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ satisfont les relations suivantes. (ind. faire une esquisse rapide peut aider !)

a) $|x-1| = 1$

b) $|x-2| < 1$

c) $|x+1| \leq 2$

d) $|x| < \sqrt{2}$

e) $|x| > 1$

f) $|x| = \pi$

Question 26
Déterminer si les fonctions f et g suivantes sont des fonctions inverses une de l'autre.

a) $f(x) = 2x - 3$ et $g(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{2}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ et $g(x) = x^3 - 1$

c) $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x-2}$ et $g(x) = \dfrac{2x+1}{3x-2}$

Question 27
Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes.

a) $f(x) = x^{100} + x^{50} + 1$

b) $f(x) = \dfrac{1}{2x-3}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)(x+2)}$

d) $f(x) = \dfrac{3x-1}{2x+5}$

e) $f(x) = \dfrac{2}{x^2-16}$

f) $f(x) = \dfrac{3}{(x-4)^2}$

g) $f(x) = \dfrac{2x^2-3x-5}{x^2-x-2}$

h) $f(x) = \sqrt{x-1}$

i) $f(x) = \sqrt{2x-5}$

j) $f(x) = \sqrt{x^3}$

k) $f(x) = \sqrt{(x-1)^3}$

l) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

m) $f(x) = \sqrt{(x^2+1)}$

n) $f(x) = \dfrac{-x+2}{x^3-x^2+5x}$

o) $f(x) = |x^3-1|$

p) $f(x) = \dfrac{1}{|x-1|}$

q) $f(x) = \dfrac{1}{|x|-1}$

r) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x-5}}$

s) $f(x) = \dfrac{1}{\log(x-4)-1}$

t) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x-x^2}{x^2+x-2}}$

Question 28
Déterminer les points de croisement avec les axes des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \sqrt{x^2-4}$

b) $f(x) = \left(x - 3\sqrt{3}\right)^{2/3}$

c) $f(x) = \sqrt{-x^2+3x+4}$

d) $f(x) = x^4 - 16$

e) $f(x) = x^3 + 27$

f) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}$

Solutions

Question 1

a) si $x \notin \mathbb{Q}$, alors $x \notin \mathbb{Z}$

b) Si $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, alors f n'est pas continue en $x = a$.

c) Si la plus n'entre pas dans le salon, alors la fenêtre est fermée.

d) Si X n'est pas mortel, alors X n'est pas humain.

e) Si ce n'est pas un légume, ce n'est pas un fruit.

f) Si $n+1$ est pair, alors n est impair.

Question 2

Soit
$$x = 0.\overline{123}$$
. On multiplie par 1000 pour obtenir
$$1000x = 123.\overline{123}.$$
En soustrayant $1000x - x$, on obtient
$$999x = 123$$
et donc
$$x = \frac{123}{999} = \frac{41}{333}$$
.

Soit
$$y = 2.\overline{18}$$
. On multiplie par 100 pour obtenir
$$100y = 218.\overline{18}.$$
En soustrayant $100y - y$, on obtient
$$99x = 216$$
et donc
$$x = \frac{216}{99} = 2411.$$

Question 3

Si $\sqrt{3}$ est un nombre rationnel, il peut s'écrire sous la forme d'une fraction simplifiée :
$$\sqrt{3} = \frac{m}{n}$$
. En multipliant par n et en prenant le carré, on obtient
$$3n^2 = m^2.$$
m^2 est donc un multiple de trois, et donc m aussi (par le lemme donné). Si $m = 3k$, on a en substituant $3k$ à n dans la dernière équation, on obtient l'égalité
$$3n^2 = 9k^2.$$
En divisant par 3, on obtient
$$n^2 = 3k^2.$$
Cette fois-ci, n^2 est un multiple de 3, et donc n est aussi un multiple de 3.

Question 4

Si $\log_2(3)$ est une faction, on peut l'écrire comme un fraction déjà simplifiée
$$\log_2(3) = \frac{m}{n}.$$
Par définition des logarithmes, cela est équivalant à dire que
$$3 = 2^{m/n}.$$
En prenant la puissance n de chaque membre de l'égalité et en simplifiant les exposants avec les propriétés des exposants, on obtient
$$3^n = 2^m.$$
Comme 2 et 3 sont des nombres premiers et que la décomposition en facteurs premiers est unique, il est impossible qu'une puissance de 2 soit aussi une puissance de 3 (sans quoi on aurait deux décompositions différentes en facteurs premiers pour un même nombre !). L'hypothèse que $\log_2(3)$ est rationnel est donc fausse et
$$\log_2(3) \notin \mathbb{Q}.$$

Question 5

Équation de la droite : $y = -3x/2 + 1/2$. Pente=$-3/2$, ordonnée à l'origine = $1/2$

Question 6

a) $y = -5x - 11$

b) $y = -\frac{1}{3}x - \frac{14}{3}$

c) $y = -5x + 3$

Question 7

a) $x = -3$ et $x = -4$

b) $x = -\frac{3}{2}$ et $x = \frac{3}{2}$

c) $x = -\frac{5}{3}$ et $x = 0$

d) La fonction n'a pas de zéro

Question 8

a) La fonction n'a pas de zéro

b) $x = \frac{4}{3}$ et $x = \frac{3}{2}$

c) La fonction n'a pas de zéro

d) $x = \frac{1}{3}$ (zéro double)

Question 9

$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$

Question 10

a) $(4x-3)(x^2+1)$

b) $(x+2)(x+3)$

c) $(3x+2)^2$

d) $(4x-9)(4x+9)$

e) $x^2 + 25$

f) $3x(x-6)(x+6)$

g) $2x^3(9x^2+16)$

h) $(x+2)(x-2)(x+1)(x-1)$

Question 11

a) x=3/4

b) aucun zéro

c) $x = 2$ et $x = 1/2$

d) $x = 1$ et $x = -1$

e) $x = 0, x = 1$ et $x = -\sqrt{2}$

f) $x = 2$ et $x = -1$

Question 12

a) $x + 1$

b) $x - 1$

c) $x + 1$ reste 2

d) $x^2 + x + 1$

e) x reste $x - 1$

f) $x^3 - 2x + 1$

g) $x^4 + 2x^2 + 1$ reste 1

Question 13

a) Non, car le facteur $x^2 - x + 5$ n'a pas de zéro : le discriminant $b^2 - 4ac$ de la formule quadratique est négatif, il n'y a donc pas de zéros.

b) Laissé à l'étudiant.

c) Il n'y en a pas d'autres, d'après la factorisation.

Question 14

a) $(x-2)$ n'est pas un facteur de $P(x)$

b) Oui

Question 15

a) Chacun des termes de $x^4 + 3x^2 + 2$ consistent en une puissance paire de x avec un facteur positif, les valeurs prises par $P(x)$ sont donc toujours strictement positives. Elle n'admet donc pas de zéros.

b) Il existe une factorisation : $(x^2+1)(x^2+2)$. On peut la trouver en posant $y = x^2$ et en factorisant $y^2 + 3y + 2$.

c) Chacun des facteurs de ce polynôme est irréductible. $P(x)$ n'a donc pas de facteur du premier degré, donc le théorème n'est pas contredit.

Question 16

a) $f(-1)$ n'est pas défini

b) $f(1) = 1$

c) $f(3/2) = 1$

d) $f(2) = 3$

e) $f(3)$ n'est pas défini

f) $f(\pi) = 1$

Question 17

a) 27

b) 1

c) 27

d) $\sqrt{2}$

e) 2

f) $(1+h)^2 = 1 + 2h + h^2$

g) $(3+h)^3 = 27 + 27h + 9h^2 + h^3$

h) $\sqrt{y^2+1}$

i) $\frac{1}{y+h}$

j) 1

k) $(x+h)^{5/2}$

l) 0

m) 1/2

n) Non défini (division par zéro).

o) 1

Question 18

a) $6x - 5$

b) $6x - 10$

c) $2x + \frac{1}{x+1}$

d) $2x^3$

e) $2x^2$

f) $4x^2$

g) $\frac{2}{(x+1)^2}$

h) $\frac{1}{4x^2+1}$

i) $\frac{1}{(2x+1)^2}$

Question 19

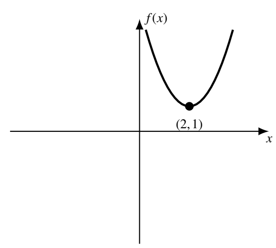
a) $y = -x + 2$

b) $f(1) = 1^3 - 4(1) = -3$

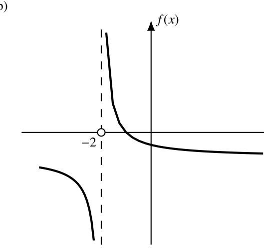
c) y=-3x-6

Question 20

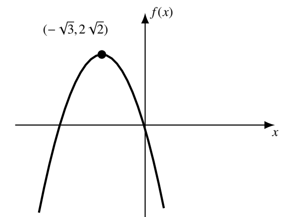
a)



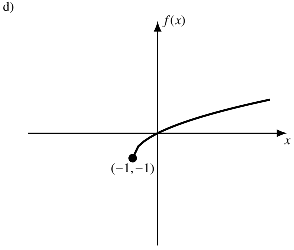
b)



c)



d)



Question 21

a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $\text{dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

b) $f(x) = 1 - x$, $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$

c) pas une fonction !

d) $f(x) = -x$, $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$

e) Pas une fonction.

f) $f(x) = \log_2(x^2)$, $\text{dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

g) $f(x) = 2x^2 - 3x + 8$, $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$.

h) $f(x) = x^2$, $\text{dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

i) Pas une fonction.

j) $f(x) = \frac{\sin(x)-2}{3}$, $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$.

Question 22

a) $f(-3) = 9$, $f(-2) = 2$, $f(0) = 0$, $f(1/2) = -1/2$, $f(1) = -1$, $f(2) = 4$.

b) $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$

Question 23

a) $f(-1) = -1/2$, $f(0) = -1$, $f(1)$ n'est pas défini, $f(2) = 1$.

b) $\text{dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

Question 24

a) $f(-3) = 3$, $f(0) = 0$, $f(2) = 2$

b) $\mathbb{R}$

c) Non, car pour une valeur y donnée de l'image il existe généralement 2 valeur x du domaine tels que $|x| = y$.

d) Si $x \geq 0$, $|x| = x$ et $\sqrt{x^2} = x$, on a donc l'égalité. Si $x < 0$, alors $|x| = -x$ et $\sqrt{x^2} = -x$. On a donc Dans tout les cas on $\sqrt{x^2} = |x|$, QED.

e) $|ab| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2b^2} = \sqrt{a^2}\sqrt{b^2} = |a||b|$, QED.

Question 25

a) $\{2, 0\}$

b) $]1, 3[$

c) $[-3, 1]$

d) $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$

e) $]-\infty, -1[\cup]1, \infty[$

f) $\{-\pi, \pi\}$

Question 26

a) $f(g(x)) = 2\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{2}\right) - 3 = x$ et $g(f(x)) = \frac{2x-3}{2} + \frac{3}{2} = x$, donc f et g sont des fonctions inverses.

b) f et g sont des fonctions inverses

c) f et g sont des fonctions inverses

Question 27

a) $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$

b) $\text{dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\{3/2\}$

c) $\text{dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\{3, -2\}$

d) $\text{dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\{-5/2\}$

e) $\text{dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\{-4, 4\}$

f) $\text{dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\{4\}$

g) $\text{dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\{2, -1\}$

h) $\text{dom}(f) = [1, \infty[$

i) $\text{dom}(f) = [5/2, \infty[$

j) $\text{dom}(f) = [0, \infty[$

k) $\text{dom}(f) = [1, \infty[$

l) $\text{dom}(f) =]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$

m) $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$

n) $\text{dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

o) $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$

p) $\text{dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

q) $\text{dom}\, f = \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$

r) $\text{dom}(f) =]-\infty, -1[\cup]5, \infty[$

s) $\text{dom}(f) =]4, \infty[$

t) $\text{dom}(f) = [-2, 0] \cup [1, 2]$

Question 28

a) Ne croise pas l'axe des y, $x = \pm 2$

b) $y = 3$, $x = 3\sqrt{3}$

c) $y = 2$, $x = -1$ ou 4

d) $y = -16$, $x = -2$ ou 2

e) $y = 27$, $x = -3$

f) Ne croise pas l'axe des y, $x = -1/2$