Pentes de tangentes

Question 1
Déterminer la pente de tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(a, f(a))$ à l'aide de la définition de dérivée.

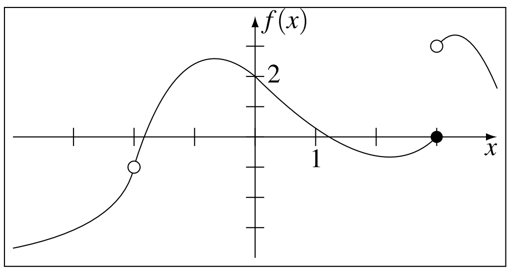
a) $f(x) = x^2 - 1$ au point $(1,0)$.

b) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ au point $(2,1/3)$.

c) $f(x) = \sqrt{x+1}$ au point $(3,2)$.

Limites

Question 2
Évaluer, s'ils existent, les nombres suivants en se basant sur le graphique de la fonction f.



a) $f(-2)$

b) $\lim\limits_{x \to (-2)^-} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to (-2)^+} f(x)$

d) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

e) $f(3)$

f) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$

g) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$

h) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

Question 3
Pour chacune des fonctions suivantes, trouver intuitivement (soit en faisant une esquisse du graphique ou en tentant une approche numérique) les limites

$$\lim_{x \to 0} f(x) \text{ et } \lim_{x \to 3^+} f(x).$$

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}$

e) $f(x) = \log_3(x)$

f) $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-9}$

Question 4
Pour chacun des cas ci-dessous, tracer l'esquisse d'une fonction ayant les propriétés indiquées.

a) $f(0) = -5$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 6$

b) $f(-4) \nexists$ et $\lim\limits_{x \to -4} f(x) = 2$

c) $f(3) = 8$ et $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 0$

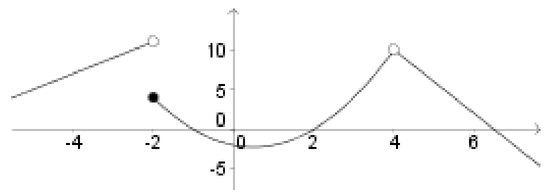
d) $\lim\limits_{x \to 8} f(x) \nexists$

e) $\lim\limits_{x \to (-10)^-} f(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x \to (-10)^+} f(x) = -\infty$

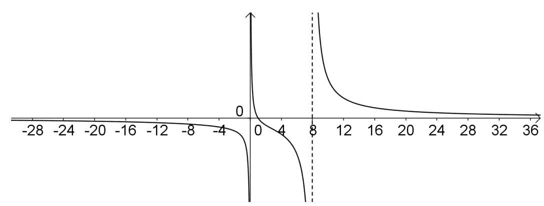
f) $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

g) $f(5) = -5$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

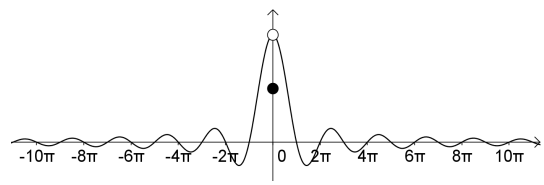
Question 5
Pour chacune des fonctions suivantes, donner tous les points de discontinuité et indiquer le type de discontinuité.



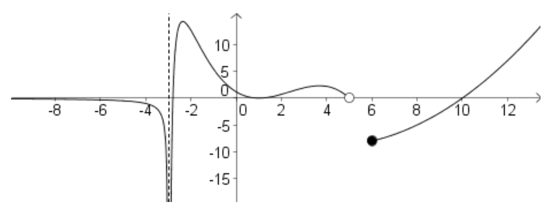
a)



b)

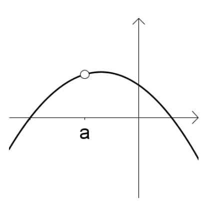


c)

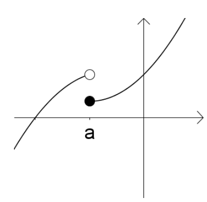


d)

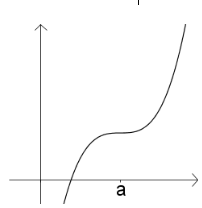
Question 6
Dans chacun des cas suivants, dire si f est continue, continue à gauche, continue à droite ou discontinue au point $x = a$.



a)

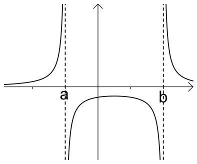


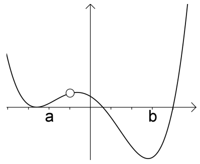
c)

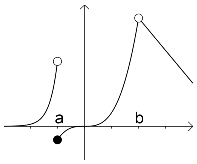


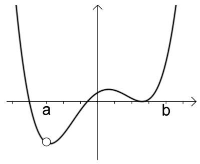
b)

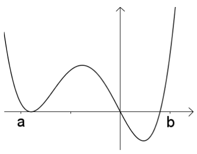
Question 7
Soient les fonctions illustrées ci-dessous.

(i)


(iv)


(ii)


(v)


(iii)


a) Quelle(s) fonctions sont continues sur l'intervalle $]a,b[$?

b) Quelle(s) fonctions sont continues sur l'intervalle $[a,b[$?

c) Quelle(s) fonctions sont continues sur l'intervalle $]a,b]$?

d) Quelle(s) fonctions sont continues sur l'intervalle $[a,b]$?

Évaluation de limites

Question 8
Évaluer, si possible, les limites demandées en utilise les propriétés des limites et en sachant que

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 5 \qquad \lim_{x\to 1} g(x) = -3$$
$$\lim_{x\to 5} h(x) = 10 \qquad \lim_{x\to 5} g(x) = 7.$$

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\big(f(x)+g(x)\big)$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} 3f(x)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\big(3f(x)-2g(x)\big)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\big(f(x)+h(x)\big)$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\big(f(x)\cdot g(x)\big)$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 1} g\big(f(x)\big)$

h) $\displaystyle\lim_{x\to 1} f\big(g(x)\big)$

Question 9
Évaluer les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 2}(x-1)(x+1)$

b) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} x\sin(x)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to -\frac{\pi}{8}} \tan(2x)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 2} 3^{(x^2-4)}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 8}\frac{\log_2(x)}{x-5}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\sqrt{\frac{x^2-1}{x+1}}$

Question 10
Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x<0 \\ 3-x & \text{si } 0\le x<3 \\ 2x-6 & \text{si } x>3 \end{cases}$$

Déterminer les quantités suivantes.

a) $f(0)$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$

e) $f(1)$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x)$

g) $f(3)$

h) $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} f(x)$

i) $\displaystyle\lim_{x\to 3^+} f(x)$

j) $\displaystyle\lim_{x\to 3} f(x)$

k) $f(5)$

l) $\displaystyle\lim_{x\to 5} f(x)$

Question 11
Évaluer les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\sqrt{x^2-1}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\sqrt{x^2-1}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\sqrt{x^2-1}$

Question 12
De quel(s) côté(s) les limites suivantes existent elles ?

a) $\displaystyle\lim_{x\to 5^\pm}\sqrt{x-5}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to (-\frac{2}{3})^\pm}\sqrt{2+3x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 8^\pm}\sqrt[3]{8-x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 2^\pm}\sqrt[6]{-x^2-x+6}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 2^\pm}\ln\left(x^2-4x+4\right)$

f) $\displaystyle\lim_{x\to (-3)^\pm}\sqrt{\frac{x^2-9}{x+3}}$

Formes indéterminées « $\frac{0}{0}$ »

Question 13
Dans le contexte de l'étude des limites, quelle est la différence entre les expressions « n'existe pas »et « indéterminée » ?

Question 14
Évaluer les limites.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^3+13x}{2x^3+x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^3-4x^2-x+12}{2x^3-x-51}$

Question 15
Évaluer les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x+2}-1}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{9}}{x^2-9}$

Question 16
Évaluer les limites.

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2-5x+2}{x^2+2x-8}$

b) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}} \dfrac{3x^2-4x+1}{3x^2-10x+3}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+2x}{x^3-x^2}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-4x^2+5x-2}$

e) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^4-81}{x-3}$

f) $\lim\limits_{x\to -1} \sqrt{\dfrac{2x^2+7x+5}{x+1}}$

g) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\frac{1}{x+3}+\frac{x^2-1}{2x+1}}{x-\frac{x-2}{x+4}}$

h) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{3+\frac{x^2-16}{x^2+x-12}}{x+1}$

Question 17
Évaluer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{|x-2|}{x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{|x-2|}{x-2}$ c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x-2|}{x-2}$

Question 18
Utiliser le conjugué pour simplifier les expressions suivantes.

a) $\dfrac{-4}{1-\sqrt{5}}$ b) $\dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}}$ c) $\dfrac{5+3x}{2+\sqrt{3x+1}}$

Question 19
Évaluer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x+5}-2}{x^2-4x-5}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{5}}$

d) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4}$

Question 20

a) Calculer la valeur de $\sin(x)$ pour les valeurs suivantes de x

$$1 \quad 0,5 \quad 0,25 \quad 0,1 \quad 0,01 \quad 0.001.$$

(Attention : angles en radians !) Que peut-on remarquer ?

b) Selon les calculs précédents, vers quelle valeur semble s'approcher $\frac{\sin(x)}{x}$ lorsque x devient de plus en plus proche de 0 ?

c) Écrire le résultat précédent à l'aide de la notation usuelle des limites.

Rappelons que ces observations sur quelques cas ne sont pas suffisantes pour tirer une conclusion générale.

Dans les cours qui suivront, nous ferons une démonstration plus rigoureuse de ce résultat important. Cet exercice a pour but de vous faire « sentir »intuitivement qu'il est vrai.

Question 21
Utilisez le résultat de la question précédente pour évaluer les limites suivantes. (ind. Il faut transformer la fonction pour faire apparaitre des expressions de la forme $\frac{\sin(A)}{A}$.)

a) $\frac{\sin(3x)}{3x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sin(x-3)}{x^2-9}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{\tan(5x)}$

e) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\sin(x)}{x-\pi/2}$

Question 22
Évaluer les limites.

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+x-1}-1}{x^3-2x^2+5x-4}$

b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+2x+1}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+2x-8}{\sqrt{x+2}-2}$

d) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{4x-2}}$

Continuité

Question 23
Trouver toutes les discontinuités des fonctions données.

a) $f(x)=4x^3-2x^2+5$

b) $f(x)=\dfrac{6x+15}{x-3}$

c) $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x^2+1}$

d) $f(x)=\cos\left(\dfrac{2}{x+3}\right)$

Question 24
Trouver toutes les discontinuités des fonctions données.

a) $f(x)=\begin{cases} x^2+4x & \text{si} \quad x<-1 \\ \dfrac{-12x}{x-3} & \text{si} \quad x\geq -1 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} 2^x & \text{si} \quad x<2 \\ \dfrac{7x+6}{x+3} & \text{si} \quad x\geq 2 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} \sin(x) & \text{si} \quad x<0 \\ 1 & \text{si} \quad x=0 \\ e^x-1 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$

Question 25
Déterminer les intervalles où les fonctions suivantes sont continues ?

a) $f(x) = 4^{1/x}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < -1 \\ \frac{2(x^2+3x-4)}{x^2-1} & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ -5 & \text{si } x = 1 \\ -4-x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \sqrt{x-3}$

d) $f(x) = \ln(x) + \frac{1}{x-5}$

e) $f(x) = (1-x)^{-5/3}$

f) $\log_2\left(x^2+2x+1\right)$

Question 26

a) Tracer une fonction définie sur l'intervalle fermé $[0,5]$ avec $f(0) < 0$ et $f(5) > 0$ qui n'admet aucun zéro dans l'intervalle $[0,5]$.

b) La fonction que vous avez donnée en (a) est-elle continue sur $[0,5]$?

c) Est-il possible qu'une fonction continue sur $[0,5]$ satisfasse aux conditions données en (a) ?

Question 27
Une compagnie de transport de colis définit son tarif comme suit : 2 $ pour un colis de 1 kg ou moins ; pour un colis dont la masse se situe entre 1 kg et 10 kg, le coût en dollars est égal au double de la masse en kg ; pour un colis de 10 kg ou plus, le coût est égal au carré de la masse.

a) Donner la fonction déterminant le coût de transport en fonction de la masse du colis.

b) Quel est le domaine de cette fonction ?

c) Cette fonction est-elle continue sur son domaine ?

Question 28
Au Québec en 2008, tout citoyen ayant un revenu inférieur à 37500 $ doit payer 16 % de son revenu en impôt. Si le revenu est de 37500 $ ou plus, mais ne dépasse pas 75000 $, l'impôt sera de 6000 $ plus 20 % de ce qui excède 37500 $. Pour un revenu de 75000 $ ou plus, l'impôt à payer est de 13500 $ plus 24 % de ce qui excède 75000 $.

Certaines personnes disent que ce mode d'imposition est injuste car certains citoyens auront des revenus semblables mais paieront des impôts très différents. Ont-ils raison ? Justifier votre réponse. (*Indice : construire d'abord la fonction donnant l'impôt à payer en fonction du revenu, puis l'analyser.*)

Question 29
Si possible, attribuer une valeur à la constante k qui rendra f continue en tout point.

a) $f(x) = \begin{cases} 7x-2 & \text{si } x \leq -1 \\ kx^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

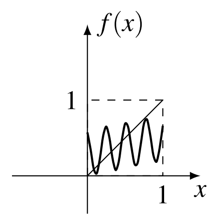
b) $f(x) = \begin{cases} kx^2 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x+k & \text{si } x > 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 9-x^2 & \text{si } x \leq -3 \\ \dfrac{k}{x^2} & \text{si } x > -3 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 9-x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{k}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Question 30
Soit $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$. Montrer que $f(x)$ a au moins un zéro en utilisant le théorème de la valeur intermédiaire.

Question 31
Soit $f(x)\colon [0,1] \to [0,1]$, c'est à dire une fonction qui prend comme argument des nombres dans l'intervalle $[0,1]$ et qui donne des valeurs dans $[0,1]$. Voici un exemple d'une telle fonction :



Montrer que si $0 < f(0) < 1$ et $0 < f(1) < 1$ (comme dans l'exemple) et que f est continue, alors il y a au moins une valeur $a \in (0,1)$ telle que $f(a) = a$ (un point où le graphe de f croise la droite $y = x$.)

Ind. Poser $g(x) = f(x) - x$ et appliquer TVI à la fonction g (comme dans l'exemple de la piscine).

Exercices récapitulatifs

Question 32
Évaluer les limites.

a) $\lim_{x\to 3} \dfrac{2x^2-x+3}{x-3}$

b) $\lim_{x\to(-4)^-} \sqrt{x+4}$

c) $\lim_{x\to(-5)^+} \ln\left(25-x^2\right)$

d) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2-5x-14}{x^2+6x+8}$

e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x^2-2x}$

f) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(-2x)\tan(4x)}{2x^2}$

g) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)}{x-1}$

Question 33
Trouver, si possible, des fonctions f et g satisfaisant les conditions suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 5}[f(x)g(x)] = 4$

b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\nexists, \lim\limits_{x\to 1} g(x)\nexists,$ mais $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{g(x)} \exists$

Question 34
Évaluer les limites

a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+4)(2x-3)}{x^7+2x^6+x^3}$

b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-27}{3-x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$

e) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2-9}{x^2+4x+3}$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{-2x+3}{5x^2-1}}$

g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{\frac{1}{x}-1}$

h) $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{x}{1-x}+\dfrac{3}{x^2-1}\right)$

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sec(x)\tan(x)}{x^2\csc(x)}$

j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4+2x}-\sqrt{4+x^2}}{\sqrt{2-x^3}-\sqrt{2+x}}$

Question 35

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^3-10x+A}{x^2-x-12}$$

Solutions

Question 1

a) 2
b) $-1/4$
c) $1/4$

Question 2

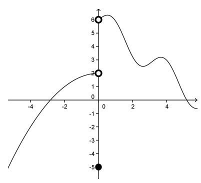
a) non défini
b) -1
c) -1
d) -1
e) 0
f) 0
g) 3
h) $\nexists$

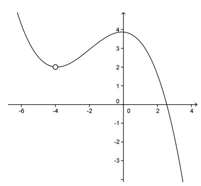
Question 3

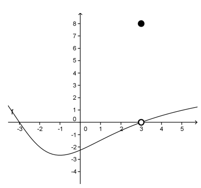
a) 0 ; 9.
b) $-1/3$; ∞.
c) ∞ ; $1/9$.
d) $1/9$; ∞.
e) $\nexists$; 1.
f) $1/3$; $1/6$.

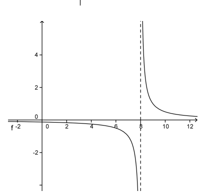
Question 4

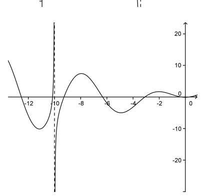
Il y a différentes réponses possibles pour ces questions. À titre indicatif, voici une possibilité pour chaque cas.

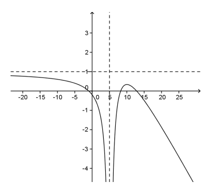
a)


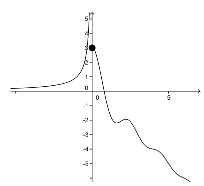
b)


c)


d)


e)


f)


g)


Question 5

a) $x=-2$ (essentielle, type 2) ; $x=4$ (non-essentielle).
b) $x=0$ et $x=8$ (essentielles, type 4)
c) $x=0$ (non-essentielle, type 1)
d) $x=-3$ (essentielle, type 4) ; $x\in[5,6]$ (essentielles, type 4)

Question 6

a) Discontinue.
b) Continue à gauche, continue à droite, continue.
c) Continue à droite, discontinue.

Question 7

a) (i), (ii), (iii), (v).
b) (ii), (iii).
c) (iii), (v).
d) (iii)

Question 8

a) 2
b) 15
c) 21
d) Impossible de calculer.
e) -15
f) $-5/3$
g) 7
h) Impossible de calculer.

Question 9

a) 3
b) $\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$
c) -1
d) 1
e) 1
f) $\sqrt{2}$

Question 10

a) 3
b) -1
c) 3
d) $\nexists$
e) 2
f) 2
g) $\nexists$

h) 0
i) 0
j) 0
k) 4
l) 4

Question 11

a) $\nexists$
b) 0
c) 0

Question 12

a) 5^+
b) $(-2/3)^+$
c) 8^- et 8^+
d) 2^-
e) 2^- et 2^+
f) Aucun côté

Question 13

Une forme indéterminée est une forme de résultat d'évaluation de limite avec l'hypothèse de continuité invalide et qui ne nous permettant pas de se prononcer sur le résultat alors qu'une limite qui n'existe pas n'a pas de résultat.

Question 14

a) 4
b) 0
c) 13
d) $2/53$

Question 15

a) -16
b) 1
c) $-1/81$

Question 16

a) $1/2$
b) $1/4$
c) $\nexists$
d) -4
e) 108
f) $\sqrt{3}$
g) $\frac{2}{19}$
h) $-\frac{29}{21}$

Question 17

a) 1
b) -1
c) $\nexists$

Question 18

a) $1+\sqrt{5}$
b) $1+\sqrt{x}$
c) $2-\sqrt{3x+1}$

Question 19

a) $1/6$
b) $-1/24$
c) $\sqrt{5}$
d) $1/6$

Question 20

a) On remarque que plus x est proche de 0, plus $sin(x)$ est proche de x.
b) $\frac{\sin(x)}{x}$ devient de plus en plus proche de 1 quand x s'approche de 0.
c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$

Question 21

a) 1
b) 3
c) $1/6$
d) $2/5$
e) $\nexists$

Question 22

a) $3/8$
b) 0
c) 24
d) $\sqrt{10}$

Question 23

a) Aucune discontinuité
b) $x=3$
c) Aucune discontinuité
d) $x=-3$

Question 24

a) $x=3$
b) Aucune discontinuité
c) $x=0$

Question 25

a) $]-\infty,0[\,;\,]0,\infty[$
b) $]-\infty,-1[\,;\,]-1,1[\,;\,[1,\infty[$
c) $[3,\infty[$
d) $]0,5[\,;\,]5,\infty[$
e) $]-\infty,1[\,;\,]1,\infty[$
f) $]-\infty,-1[\,;\,]-1,\infty[$

Question 26

Laissée à l'étudiant, il y a plusieurs réponses possibles

Question 27

a) $C(m)=\begin{cases} 2 & \text{si} \quad 0<m\leq 1 \\ 2m & \text{si} \quad 1<x<10 \\ m^2 & \text{si} \quad x\geq 10 \end{cases}$
b) $]0,\infty[$
c) Non, il y a une discontinuité à 10 kg.

Question 28

Ils ont tort. Comme la fonction est continue, la proximité est conservée et il n'y a pas de changements brusques.

Question 29

a) $k=-9$
b) $k=4/3$
c) $k=0$
d) Impossible.

Question 30

f est continue car polynômiale. De plus, $f(2)=2^5-2^4+2^3-2^2+2-1=32-16+8-4+2-1=21>0$ et $f(-2)=(-2)^5-(-2)^4+(-2)^3-(-2)^2+(-2)-1=-32-16-8-4-2-1=-63<0$. Par le théorème de la valeur intermédiaire, f doit avoir au moins un zéro dans l'intervalle $(-2,2)$.

Question 31

Soit $g(x)=f(x)-x$. Comme f est continue sur $[0,1]$, g l'est aussi. De plus, $g(0)=f(0)-0=f(0)>0$ et $g(1)=f(1)-1<0$ car $f(1)<1$. Par TVI, il y a un $a\in(0,1)$ tel que $g(a)=0$. On a donc un a tel que $g(a)=f(a)-a=0$, ou encore $f(a)=a$, QED.

Question 32

a) $\nexists$
b) $\nexists$
c) $-\infty$
d) $-9/2$
e) $-\frac{1}{4\sqrt{3}}$
f) -4
g) -1

Question 33

Laissé à l'étudiant.

Question 34

a) $\nexists$
b) -27
c) ∞
d) $\nexists$
e) 3
f) $\nexists$
g) -2
h) ∞
i) 1
j) $-\sqrt{2}$

Question 35

$A=-24$