Exercices 3 – Calcul différentiel

Département de mathématiques – Cégep de Saint-Laurent
201-NYA – Automne 2017 – Professeur : Yannick Delbecque
http://prof.delbecque.org – prof@delbecque.org – Bureau C286 – 514-747-6521 poste 7289

Limites

Question 1

Démontrer que

$$\lim_{x\to a} f(x) - g(x) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$

si les limites du membre de droite existent en n'utilisant que les quatre première propriétés des limites que nous avons pris comme hypothèse. À chaque étape de votre démonstration, indiquer quelle propriété est utilisée.

Taux de variation et fonction dérivée

Question 2

Soit la fonction définie par l'équation $y = x^3$. a) Calculer le taux de variation moyen de y sur l'intervalle demandé.

i. $[2;4]$
ii. $[2;3]$
iii. $[2;2,1]$
iv. $[2;2,01]$
v. $[2;2,001]$.

b) Identifier la valeur de h (ou Δx) pour chacun des cas de la question précédente.

c) Selon le numéro 1, vers quel nombre semble s'approcher le taux de variation de $y = x^3$ entre 2 et $2+h$ lorsque h diminue ?

Question 3

Soit la fonction $f(x) = x^3 - x$

a) Calculer $\text{TVM}_{[2;4]} f(x)$.
b) Calculer $\text{TVM}_{[a;b]} f(x)$.
c) Calculer $\text{TVM}_{[x;x+h]} f(x)$.
d) Calculer $f'(x)$ en utilisant le résultat trouvé en b).
e) Calculer $f'(x)$ en utilisant le résultat trouvé en c).

Question 4

La fonction donnant l'aire d'un cercle (en centimètres carrés) par rapport à son rayon (en centimètres) est $A(r) = \pi r^2$

a) Quelle est la variation de l'aire du cercle si le rayon passe de 2 cm à 4 cm ? Bien indiquer les unités.
b) Quelle est le taux de variation moyen de l'aire du cercle si le rayon passe de 2 cm à 4 cm ? Bien indiquer les unités.
c) Quelle est le taux de variation instantané de l'aire du cercle lorsque le rayon est de 4 cm ? Bien indiquer les unités.

Question 5

Supposons que durant les deux premières années de sa vie, la masse (en kilogrammes) d'un bébé en fonction du temps t (en mois) écoulé depuis sa naissance est donnée par la fonction $m(t) = \sqrt{12 + 7t}$.

a) Quelle est la masse du bébé à sa naissance ?
b) Évaluer l'expression $\dfrac{m(8) - m(5)}{3}$ et en donner un interprétation.
c) Quelle fonction donne le taux de croissance instantané de la masse du bébé ?
d) Quel est le taux de croissance instantané de la masse du bébé lorsque celui-ci est âgé de 9 mois ? Interpréter.
e) Le bébé grossit-il plus rapidement à 3 mois ou à 9 mois ?

Question 6

Utiliser les deux formes de la définition de la dérivée pour calculer $f'(2)$ si $f(x) = x^3$.

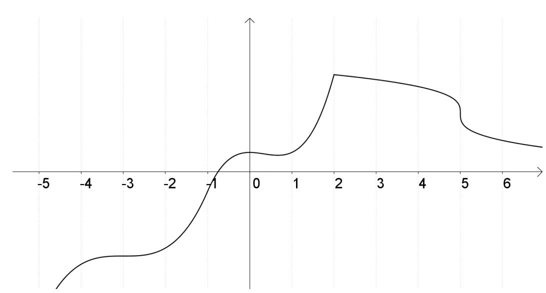
Question 7

Trouver la dérivée des fonctions suivantes en utilisant la définition.

a) $g(x) = \sqrt{x+3}$
b) $h(x) = \dfrac{x+3}{x+5}$

Question 8

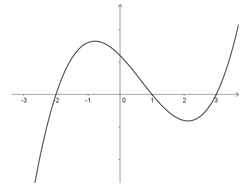
Soit la fonction représentée par le graphique ci-dessous.

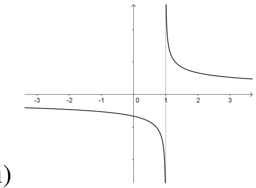


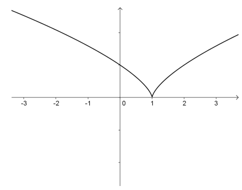
a) Pour quelle(s) valeur(s) de x la dérivée de cette fonction est-elle nulle ?
b) Pour quelle(s) valeur(s) de x cette fonction n'est-elle pas dérivable ?
c) La dérivée de cette fonction est-elle plus grande en $x = -1$ ou en $x = 1$?

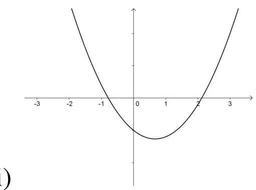
Question 9

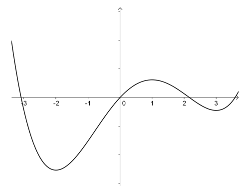
Associer chacune des fonctions suivantes à sa dérivée.

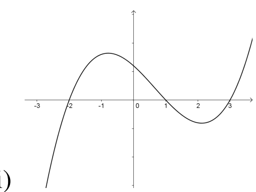
a)


i)


b)


ii)


c)


iii)


Solutions

Question 1

$\lim\limits_{x\to a} f(x) - g(x) =$

$= \lim\limits_{x\to a} f(x) + (-1)g(x)$

$= \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a}(-1)g(x)$(limite d'une somme)

$= \lim\limits_{x\to a} f(x) + \left(\lim\limits_{x\to a}(-1)\right)\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right)$(limite d'un produit)

$= \lim\limits_{x\to a} f(x) + (-1)\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right)$(limite d'une constante)

$= \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Ce calcul est valable si les limites à droite de la première égalité existent, car c'est une condition de l'application des propriétés limite d'une somme et d'un produit.

Question 2

a)

i. $\frac{4^3-2^3}{4-2} = 28$

ii. 19

iii. $12,61$

iv. $12,0601$

v. $12,006001$

b)

i. 2

ii. 1

iii. $0,1$

iv. $0,01$

v. $0,001$

c) 12

Question 3

1. 27
2. $\dfrac{b^3 - b - \left(a^3 - a\right)}{b-a} = b^2 + ab + a^2 - 1$
3. $\dfrac{(x+h)^3 - (x+h) - \left(x^3 - x\right)}{h} = 3x^2 + 3xh - 1$
4. $f'(a) = \lim\limits_{b\to a} b^2 + ab + a^2 - 1 = 3a^2 - 1$ donc $f'(x) = 3x^2 - 1$.
5. $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} 3x^2 + 3xh - 1 = 3x^2 - 1$

Question 4

a) 12π cm^2

b) 6π cm

c) 8π cm

Question 5

1. $\sqrt{12}$ kg
2. Entre l'âge de 5 mois et 8 mois, la masse de ce bébé a augmenté à un taux moyen de $\frac{\sqrt{68}-\sqrt{47}}{3}$ kg/mois $\approx= 0,4635$ kg/mois.
3. $m'(t) = \dfrac{7}{2\sqrt{12+7t}}$
4. À l'âge d'exactement 9 mois, le bébé grossit à un taux de
$$m'(9) = \frac{7}{2\sqrt{75}} \text{ kg/mois.}$$
5. À 3 mois, car $m'(3) > m'(9)$.

Question 6

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(2+h)^3 - 2^3}{h} = 12$

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 2^3}{x-2} = 12$ en utilisant $x^3 - 2^3 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$ pour lever l'indétermination.

Question 7

a) $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}$

b) $h'(x) = \dfrac{2}{(x+5)^2}$

Question 8

a) $x \in \left\{-3,\ -\frac{1}{4},\ \frac{2}{3}\right\}$

b) $x \in \{2,\ 5\}$

c) En $x = -1$.

Question 9

a) ii) *b)* i) *c)* iii)