# Dérivée de fonctions transcendantes

## Fonctions exponentielles et logarithmiques

**Question 1**
Évaluer et simplifier.

a) $\log_{10}(1000)$
b) $\log_{100}(10)$
c) $\log_2(8)$
d) $\log_3\left(\frac{1}{9}\right)$
e) $\log_3\left(\sqrt[4]{9}\right)$
f) $\log_2(8)$
g) $\log_3(54)$ (ind. $\log_3 2 \approx 0{,}63$)
h) $e^0$
i) $\log_2\left(\sqrt{2^5}\right)$
j) $\ln(1)$
k) $\ln\left(e^3\right)$
l) $\ln\left(\sqrt{e}\right)$
m) $\log_2\left(\left(2^{11}\right)^9\right)$
n) $\log_2\left(\frac{5}{2}\right)-\log_2\left(\frac{10}{2}\right)$

**Question 2**
Résoudre les équations suivantes.

a) $\log_2 x = 5$
b) $3^x = 100$
c) $5\cdot 3^x = 2^{x+1}$
d) $2\log_4 x - \log_4 x - 1 = 1$

**Question 3**
Évaluer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x)$
b) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{\ln(x)}$
c) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x-1}$
d) $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1}{x^2-2x-3}$
e) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}$

**Question 4**
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $y = 3^x + 3^{-x} + x^3 + 3x$
b) $y = 8^{2^x+x^2}$
c) $y = \dfrac{x^3}{e^x}$
d) $y = x\cdot 8^x$

**Question 5**
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $y = \log_5\left(x^3+1\right)$
b) $y = \dfrac{\ln(x)}{x}$
c) $y = x^4\ln^5(x)$
d) $y = \sqrt{\log_3 x}$

**Question 6**
Trouver $\dfrac{dy}{dx}$.

a) $e^{x+y} = y^2+1$
b) $x\ln(y) - 3xy^2 = 0$

**Question 7**
Soit la fonction $f(x) = e^{-x^2}$

a) Faire l'étude complète de croissance, concavité et asymptotes de cette fonction puis tracer son graphique.
b) Trouver les dimensions du rectangle d'aire maximale que l'on peut inscrire entre l'axe des $x$ et la courbe de $f$.

**Question 8**
Soit $f(x) = x^k - k^x$, où $k$ est une constante positive. Trouver la valeur de $k$ pour laquelle $f'(1) = 0$.

**Question 9**
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $y = e^{\sqrt{x}} + \sqrt{e^x}$
b) $y = e^{\frac{x^2}{x-5}}$
c) $y = 2^{3^{5^x}}$
d) $y = \ln x \log x$
e) $y = \dfrac{\ln x^4}{x^4}$
f) $y = \left(x+\ln^2(x)\right)^5$

## Fonctions trigonométriques

**Question 10**
Évaluer et simplifier.

a) $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$
b) $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$
c) $\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)$
d) $\sec\left(\frac{5\pi}{3}\right)$
e) $\operatorname{cosec}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
f) $\operatorname{cotan}\left(\frac{-2\pi}{3}\right)$
g) $\sin(\operatorname{asin}(1/2))$

**Question 11**
Évaluer, sans calculatrice.

a) $\sin\left(\frac{8\pi}{3}\right)$
b) $\cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right)$
c) $\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
d) $\cot\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$
e) $\sec\left(\frac{4\pi}{3}\right)$
f) $\csc\left(-\frac{\pi}{4}\right)$
g) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$
h) $\cos\frac{\pi}{12}$

**Question 12**
Démontrer les identités trigonométriques suivantes

a) $\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$
b) $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$
c) $\sin^4\theta - \cos^4\theta = \cos 2\theta$
d) $\tan\dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$

**Question 13**
Démontrer que $(\cos x)' = -\sin x$

a) En utilisant la définition de la dérivée.
b) En utilisant l'identité $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$.
c) En utilisant les identités $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ et $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

**Question 14**
Démontrer les formules de dérivation suivantes à l'aide des formules de dérivation des fonctions $\sin(x)$ et $\cos(x)$ et des propriétés de la dérivée.

a) $(\cot x)' = -\csc^2 x$

b) $(\csc x)' = -\csc x \cot x$

**Question 15**
Évaluer les limites suivantes

a) $\lim\limits_{x\to\pi} \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{2^x}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} 2^{-x}$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$

h) $\lim\limits_{x\to\infty} \log_{1/3}(x)$

i) $\lim\limits_{x\to 2} \log_2\left(x^2-3x+2\right)$

j) $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{5}{\log_3(x-4)}$

k) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\sqrt{x}+\ln(-x)\right)$

**Question 16**
Évaluer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to 2^+} \log(x-2)$

b) $\lim\limits_{x\to 2^-} \log(x-2)$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \log(x-2)$

d) $\lim\limits_{x\to 3} \ln\left(x^2-6x+9\right)$

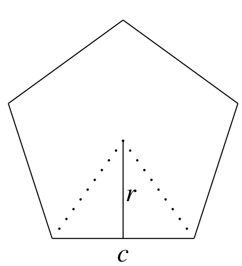
**Question 17**
Trouver les asymptotes des fonctions suivantes.

a) $y = \log\left(x^2-1\right)$

b) $y = \ln\left(\dfrac{x-2}{x-3}\right)$

c) $f(x) = \begin{cases} e^x+4 & \text{si } x<0 \\ \dfrac{x^3-1}{x+2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

**Question 18**
Un polygone régulier à $n$ côtés est une figure formée de $n$ côtés et angles congrus (carré, pentagone régulier, hexagone régulier, etc.). Plus le nombre de côtés augmente, plus le polygone ressemble à un cercle. On peut dire qu'un cercle est la limite d'un polygone régulier lorsque le nombre $n$ de côtés tend vers l'infini. Le rayon de ce cercle correspondra alors à l'apotème $r$ illustrée dans la figure.




a) Trouver l'aire d'un polygone régulier à $n$ côtés en fonction de $r$ et de $c$.

b) Exprimer $c$ en fonction de $n$ (vous aurez besoin de trigonométrie ici).

c) Utiliser les deux résultats pour trouver une formule générale pour l'aire d'un polygone à $n$ côtés en fonction uniquement de $n$ et de $r$.

d) En déduire la formule de l'aire d'un cercle (Remarquons que $r$ est une constante dans le processus). *Vous venez de démontrer la formule de l'aire du cercle ! Cette formule a été démontrée pour la première fois par Archimèdes (287 av. J.C. – 212 av. J.C.), mais sans utiliser le concept moderne de limite.*

**Question 19**
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $y = x^3\sin(x)$

b) $y = \cos(3x) - 3\cos(x)$

c) $y = \sec^2(x)$

d) $y = \cot(3x)\csc(3x)$

e) $y = \tan\left(\dfrac{x^2}{x+1}\right)$

f) $y = e^{\sin(3x)}$

**Question 20**
Trouver $\dfrac{dy}{dx}$ à l'aide de la dérivation implicite.

a) $x\sin(x) + y\cos(y) = 0$

b) $\sin^4(xy) + xy = 0$

c) $\sec(y^3) + y^2 = 3x^4$

d) $x\tan(e^y) + \ln y = 3$

**Question 21**
Étudier la croissance et la concavité des fonctions suivantes et tracer leur graphique.

a) $f(x) = \dfrac{x}{2} + \sin(x)$, où $x \in [0,\ 2\pi]$

b) $f(x) = \sin x + \cos(x)$, où $x \in [0,\ 2\pi]$

**Question 22**
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $y = \cos(\mathrm{e}^{-x})$

b) $y = \sin^3(x) + 3^{\sin(x)}$

c) $y = \ln(\sec(x) + \tan(x))$

d) $y = \dfrac{1+\csc(x^2)}{1-\cot(x^2)}$

e) $y = \cos\left(\tan(x^2)\right)$

f) $y = \mathrm{e}^{x^3}\sec^2(2x)$

g) $y = \mathrm{e}^{\tan(x)} - \sin(x)\cos(x)$

h) $y = \cot\left(\dfrac{x-1}{x-4}\right)$

## Fonctions trigonométriques inverses

**Question 23**
Évaluer et simplifier.

a) $\sin(\mathrm{asin}(1/2))$

b) $\mathrm{acos}(\cos(\pi/7))$

c) $\mathrm{asin}(\sin(7\pi/5))$

d) $\mathrm{asin}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

e) $\mathrm{acos}\left(-\frac{1}{2}\right)$

f) $\mathrm{atan}(-1)$

g) $\mathrm{atan}\left(\sqrt{3}\right)$

**Question 24**
Sans calculatrice, évaluer les nombres suivants en radians.

a) $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$
b) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$
c) $\arctan(-1)$
d) $\operatorname{asec}(2)$
e) $\operatorname{actg}\left(\sqrt{3}\right)$
f) $\arcsin((\sin(5)))$
g) $\tan((\arctan(3)))$
h) $\lim_{x\to\infty} \arctan(x)$

**Question 25**
Résoudre les équation suivantes.

a) $\sin(x)+1=\cos(x)$
b) $2\sin\left(x^2-1\right)=\sqrt{2}$

**Question 26**
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $y=\arcsin\left(x^3-3x\right)$
b) $y=(x-\arctan(2x))^5$
c) $y=\operatorname{acsc}(x^2)$
d) $y=x\arccos 2x$
e) $y=\arcsin\left(\sqrt{x}\right)$
f) $y=\dfrac{2}{\operatorname{actg}(x)}$

**Question 27**
Trouver $\dfrac{dy}{dx}$.

a) $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)=y^2$
b) $\arccos(y)=\arcsin(x)$
c) $e^{\arctan(y)}=\sin(\ln(x))$

**Question 28**
Trouver les valeurs de $x$ pour lesquelles la fonction $f(x)=\arcsin(3x)$ admet une droite tangente perpendiculaire à la droite $y=3-x/5$.

**Question 29**
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $y=x\arctan(x)$
b) $y=\arccos\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$
c) $y=\operatorname{actg}\left(e^{3\sec(x)}\right)$
d) $y=\operatorname{asec}\left(x^2+1\right)$
e) $y=\dfrac{\arcsin(x^2)}{\ln(x)}$

## Applications

**Question 30**
Soit la fonction $f(x)=x+\ln\left(x^2+1\right)$

a) Montrer que $f$ est toujours croissante
b) Étudier la concavité de $f$ et donner les points d'inflexion.

**Question 31**
Trouver les extremums absolus des fonctions données sur l'intervalle $[0,2\pi]$.

a) $f(x)=\cos^2(2x)$
b) $f(x)=5\sin(x)+12\cos(x)$

**Question 32**
Un virus se propage de telle sorte que le nombre de personnes atteintes du virus $t$ semaines après son apparition est donné par

$$N(t)=\frac{5000}{2+8e^{-\frac{3t}{4}}}.$$

a) Initialement, combien de personnes sont porteuses du virus
b) Combien de personnes seront atteintes 4 semaines après son apparition ?
c) Dans combien comptera-t-on 1300 victimes ?
d) À long terme, combien de personnes contracteront ce virus ?
e) Quel est le taux de propagation du virus après 2 semaines ?
f) Quel est ce taux à long terme ?
g) À quel moment le virus se propage-t-il le plus rapidement ?

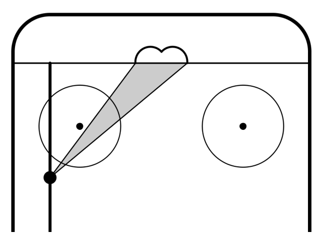
**Question 33**
On lance un projectile avec un canon selon une vitesse initiale de $v_0$ m/s. Si on néglige la résistance de l'air, la portée (la distance horizontale parcourue par le projectile) est donnée par la fonction

$$R(\theta)=\frac{v_0^2\sin(2\theta)}{g}$$

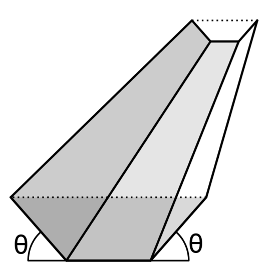
où $g=9,8$ m/s$^2$ et $\theta$ est l'angle d'inclinaison du canon. Selon quel angle doit-on placer le canon pour avoir une portée maximale ?

**Question 34**
Les côtés congrus d'un triangle isocèle mesurent 5 cm. Trouver l'angle $\theta$ entre ces deux côtés qui maximise l'aire du triangle.

**Question 35**
À quelle distance de la ligne des buts un ailier gauche de hockey sur table doit-il lancer pour maximiser ses chances de marquer si le but mesure 5 cm de largeur et que le joueur est restreint à un rail situé à 8 cm du poteau le plus près ? On suppose que le joueur maximise ses chances de marquer si l'angle d'ouverture vers le but est maximal.

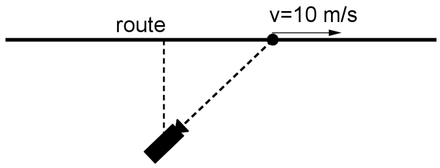


**Question 36**
On fabrique une auge à partir d'une feuille de métal de 120 cm de largeur. De chaque côté, on replie une bande de 40 cm selon un angle $\theta$. Quel doit être cet angle pour que l'auge puisse contenir un volume maximal ?



**Question 37**
Trouver l'équation de la droite tangente à la courbe de $f(x) = \ln(\sin x)$ au point $\left(\frac{\pi}{4}, f(\frac{\pi}{4})\right)$.

**Question 38**
Un caméraman est posté à 5 m d'une route rectiligne et doit filmer une voiture qui passera sur cette route à vitesse constante de 10 m/s. À quelle vitesse angulaire (en rad/s) la caméra doit-elle pivoter exactement une seconde après que la voiture soit passée devant elle ?




**Question 39**
Une étude menée auprès d'athlètes olympiques révèle que la capacité pulmonaire de ces derniers obéit à la fonction

$$C(x) = \frac{0,8\ln(x) - 1,8}{0,009x},$$

où $x$ est l'âge de l'athlète. À quel âge un athlète a-t-il une capacité pulmonaire maximale ?

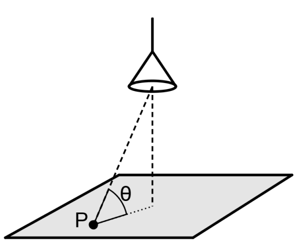
**Question 40**
À l'aide du test de la dérivée seconde, trouver les extremums relatifs de

$$f(x) = \arctan(x) + \frac{x^2}{2} - x.$$

**Question 41**
Soit $f(x) = \sqrt{x-4}$ et la droite $D$ joignant l'origine et un point quelconque sur la courbe de $f$. Quelle valeur de $x$ minimise l'angle entre la droite $D$ et l'axe des $x$

**Question 42**
On forme un cône en supprimant un secteur d'un disque de rayon égal $r$. Trouver la valeur de l'angle $\theta$ pour lequel le volume du cône obtenu est maximal.

**Question 43**
On doit suspendre une lampe au dessus du centre d'une table carrée de 2 m par 2 m. L'intensité de la lumière à un point $P$ de la table est directement proportionnel au sinus de l'angle que forme le rayon lumineux avec la table, et inversement proportionnel à la distance entre $P$ et la lampe. À quelle hauteur la lampe doit-elle être suspendue pour que l'intensité lumineuse soit maximale aux quatre coins de la table ?

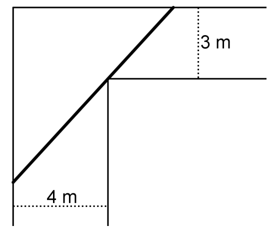



**Question 44**
Trouver les extremums relatifs des fonctions suivantes.

a) $y = \ln^2\left(2x^2 - x\right)$.

b) $y = \sin^2 x + 2\cos x$.

**Question 45**
Quelle est la longueur maximale du tuyau de diamètre négligeable qui peut tourner le coin de ce corridor si on néglige la hauteur du corridor ?




## Exercices récapitulatifs

**Question 46**
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $y = \log_3 \sqrt{x}$

b) $y = \sqrt{\ln \sqrt{x}}$

c) $y = 4\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^x}$

d) $y = (e^x + 2^x)^5$

e) $y = \dfrac{e^x}{e^x - x}$

f) $y = \tan^2 e^{x^3}$

g) $y = \log(\cos 3x - \cos^3 2x)$

h) $y = \sin(2^x + \cos x)$

i) $y = \ln\left(\csc\left(3x^4 - 2e^x\right)\right)$

j) $y = \cot\sqrt{x} + \sqrt{\sec x^2}$

k) $y = \dfrac{x^2}{\tan\sqrt[3]{x}}$

l) $y = \sqrt{\sec(\sin x^2)}$

m) $y = \ln(\arctan e^x)$

n) $y = \operatorname{arccot}\dfrac{1}{x}$

o) $y = \arcsin\dfrac{\ln x}{x}$

**Question 47**
Vous avez remarqué au numéro (38 n) que $\operatorname{actg}\left(\frac{1}{x}\right)' = (\operatorname{atan}(x))'$. Montrer, à l'aide d'un triangle rectangle, que $\operatorname{actg}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{atan}(x)$.

**Question 48**
Trouver $\dfrac{dy}{dx}$.

a) $e^x \ln y = y\tan x$

b) $\cos\left(x^2y^2\right) = \ln x$

c) $\arcsin e^y = x\sqrt{y}$

**Question 49**
Soit la fonction $f$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^x - x + k & \text{si } x < 0 \\ -x^3 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ \dfrac{\ln x}{x} & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

a) Quelle doit être la valeur de $k$ pour que $f$ soit continue en $x = 0$ ?

b) Pour cette valeur de $k$, $f$ est-elle dérivable en $x = 0$ ?

c) $f$ est-elle continue en $x = 1$ ?

d) $f$ est-elle dérivable en $x = 1$ ?

**Question 50**
Utiliser les propriétés des logarithmes pour dériver

$$f(x) = \ln \frac{\sin^5 2x \sec^4 3x}{\sqrt{x^2+5}}.$$

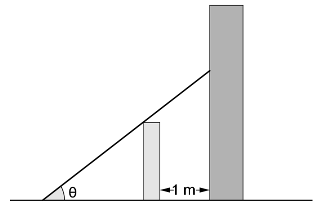
**Question 51**
Utiliser la dérivée logarithmique pour dériver les fonctions suivantes.

a) $y = x^{\sin x}$    b) $y = (\sin x)^{\arctan x}$

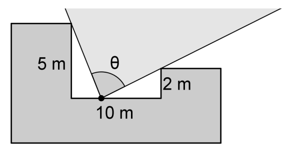
**Question 52**
Soit $f(x) = 3e^{4x}$. Trouver une expression pour $f^{(n)}(x)$ (la $n$-ième dérivée de $f$).

**Question 53**
Faire l'étude complète de la fonction $f(x) = x\mathrm{e}^x$ et tracer son graphique.

**Question 54**
On veut atteindre un mur fragile en appuyant une échelle sur un muret de 2 m de haut situé à 1 m du mur. Déterminer l'angle $\theta$ qui minimise la longueur de l'échelle à utiliser.




**Question 55**
On veut placer une caméra de surveillance sur le mur de 10 mètres. À quel endroit doit-on la placer pour maximiser son champ de vision ?




# Solutions

**Question 1**

a) 3    f) 3    k) 3
b) 1/2    g) 3,63    l) 1/2
c) 3    h) 1    m) 99
d) −2    i) 5/2    n) −1
e) 1/2    j) 0

**Question 2**
a) $x = 32$
b) $x = \ln_3 100$
c) $x = \dfrac{\ln(2/5)}{\ln(3/2)}$
d) $x = 2$

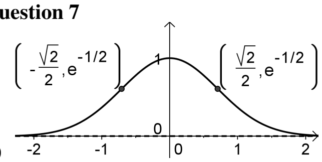
**Question 3**

a) $-\infty$    c) $-\infty$    e) $0^+$
b) $\infty$    d) $-\infty$

**Question 4**
a) $\dfrac{dy}{dx} 3^x \ln(3) - 3^{-x}\ln(3) + 3x^2 + 3$
b) $\dfrac{dy}{dx} = 8^{2^x+x^2}(2^x \ln(2) + 2x)\ln(8)$
c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2(3-x)}{\mathrm{e}^x}$
d) $\dfrac{dy}{dx} = 8^x(1 + x\ln(8))$

**Question 5**
a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2}{(x^3+1)\ln(5)}$
b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$
c) $\dfrac{dy}{dx} = x^3 \ln^4(x)(4\ln(x)+5)$
d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2x\ln(3)\sqrt{\log_3(x)}}$

**Question 6**
a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\mathrm{e}^{x+y}}{2y - \mathrm{e}^{x+y}}$
b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y\ln(y) - 3y^3}{6xy^2 - x}$

**Question 7**
a) 

b) Base de $\sqrt{2}$, hauteur de $\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

**Question 8**
$k = \mathrm{e}$

**Question 9**
a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{\mathrm{e}^x}}{2}$
b) $\dfrac{dy}{dx} = e^{\frac{x^2}{x-5}} \dfrac{x^2-10x}{(x-5)^2}$
c) $\dfrac{dy}{dx} = 2^{3^{5^x}} 3^{5^x} 5^x \ln(2)\ln(3)\ln(5)$
d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2\log(x)}{x}$
e) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4-16\ln(x)}{x^5}$
f) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{5\left(x+\ln^2(x)\right)^4 (x+2\ln(x))}{x}$

**Question 10**

a) 1    d) 2    g) 1/2
b) $-\sqrt{3}/2$    e) $\sqrt{2}$
c) 1    f) $1/\sqrt{3}$

**Question 11**
a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
b) 0
c) −1
d) $\sqrt{3}$
e) $-\sqrt{2}$
f) −2
g) $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$
h) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

**Question 12**
a) Laissé à l'étudiant. Utilisez l'identité donnant le cosinus d'une somme de deux angles.
b) Laissé à l'étudiant.
c) Laissé à l'étudiant.
d) Laissé à l'étudiant.

**Question 13**
a) Laissé à l'étudiant. S'inpirer de la preuve de $(\sin(x))' = \cos(x)$ ; vous pouvez utiliser les deux lemmes démontrés en classe sans les redémontrer.
b) Laissé à l'étudiant. Dériver directement.
c) Laissé à l'étudiant. Fait en classe, tentez de le refaire par vous même.

**Question 14**
a) Laissé à l'étudiant. S'inspirer des preuves vues en classe.
b) Laissé à l'étudiant.

**Question 15**
a) 1
b) 1
c) 0
d) 0
e) 0
f) 0
g) $\infty$
h) $-\infty$
i) $\nexists$
j) 0
k) $\nexists$

**Question 16**
a) $-\infty$
b) $\nexists$
c) $\nexists$
d) $-\infty$

**Question 17**
a) Pas d'A.H. ; A.V. en $x = 0$.
b) A.H. en $y = 0$ ; A.V. en $x = 2$ et en $x = 3$.
c) A.H. en $y = 4$ ; pas d'A.V.

**Question 18**
a) $A = \frac{ncr}{2}$
b) $c = 2r\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$
c) Laissé à l'étudiant.
d) Laissé à l'étudiant. Indice : il faut adapter le résultat $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$ à la situation.

**Question 19**
a) $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2\sin(x) + x^3\cos x$
b) $\dfrac{dy}{dx} = 3\sin(x) - 3\sin(3x)$
c) $\dfrac{dy}{dx} = 2\sec^2(x)\tan(x)$
d) $\dfrac{dy}{dx} = 3\csc(3x)\left(1 - 2\csc^2(3x)\right)$
e) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\left(x^2+2x\right)\sec^2\left(\frac{x^2}{x+1}\right)}{(x+1)^2}$

f) $\frac{dy}{dx} = 3e^{\sin(3x)}\cos(3x)$

**Question 20**

a) $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin(x)+x\cos(x)}{\cos(y)-y\sin(y)}$

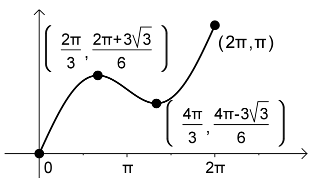
b) $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$

c) $\frac{dy}{dx} = \frac{12x^3}{3y^2\sec(y^3)\tan(y^3)+2y}$

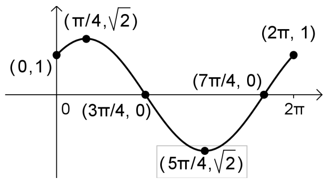
d) $\frac{dy}{dx} = \frac{-y\tan(e^y)}{xye^y\sec^2(e^y)+1}$

**Question 21**

a)




b)




**Question 22**

a) $\frac{dy}{dx} = e^{-x}\sin e^{-x}$

b) $\frac{dy}{dx} = \cos x\left(3sin^2(x)+3^{\sin(x)}\ln(3)\right)$

c) $\frac{dy}{dx} = \sec(x)$

d) $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x\csc(x^2)\left(1+\cot(x^2)+\csc(x^2)\right)}{(1-\cot(x^2))^2}$

e) $\frac{dy}{dx} = -2x\sec^2(x^2)\sin\left(\tan(x^2)\right)$

f) $\frac{dy}{dx} = e^{x^3}\sec^2(2x)\left(3x^2+4\tan(2x)\right)$

g) $\frac{dy}{dx} = e^{\tan(x)}\sec^2(x)-\cos(2x)$

h) $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{x-4}\csc^2\left(\frac{x-1}{x-4}\right)$

**Question 23**

a) $1/2$ d) $-\pi/4$ g) $\pi/3$

b) $\pi/7$ e) $2\pi/3$

c) $-2\pi/5$ f) $-\pi/4$

**Question 24**

a) $\frac{\pi}{6}$

b) $\frac{2\pi}{3}$

c) $-\frac{\pi}{4}$

d) $\frac{\pi}{3}$

e) $\frac{\pi}{6}$

f) 5

g) 3

h) $\frac{\pi}{2}$

**Question 25**

a) Mettre au carré chaque membre de l'égalité. $x = -\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$

b) $x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{4}++1+2\pi k}, k\in\mathbb{Z}$ ou $x = \pm\sqrt{\frac{3\pi}{4}+1+2\pi k}, k\in\mathbb{Z}$

**Question 26**

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2-3}{\sqrt{1-(x^3-3x)^2}}$

b) $\frac{dy}{dx} = 5(x-\arctan(2x))^4\,\frac{4x^2-1}{4x^2+1}$

c) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x\sqrt{x^4-1}}$

d) $\frac{dy}{dx} = \arccos(2x)-\frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}$

e) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$

f) $\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{(x^2+1)\,\mathrm{actg}^2(x)}$

**Question 27**

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{2x^2+2y^3-x}$

b) $\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$

c) $\frac{dy}{dx} = \frac{\left(1+y^2\right)\cos(\ln(x))}{xe^{\arctan(y)}}$

**Question 28**

$x = -4/15$ et $x = 4/15$

**Question 29**

a) $\frac{dy}{dx} = \arctan(x)+\frac{1}{1+x^2}$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2+2}{\sqrt{x^4-6x^2+1}}$

c) $\frac{dy}{dx} = -\frac{3e^{3\sec(x)}\sec(x)\tan(x)}{1+e^{6\sec(x)}}$

d) $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$

e) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{\ln(x)\sqrt{1-x^4}}-\frac{\arcsin(x)}{x\ln^2(x)}$

**Question 30**

a) Laissé à l'étudiant. Montrer que la dérivée est toujours $\geq 0$

b) Concave vers le haut sur $[-1,1]$, concave vers le bas sur $]-\infty,-1]$ et $[1,\infty[$, points d'inflexion en $x=-1$ et $x=1$.

**Question 31**

a) max=1, atteint en $x \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$, min=0, atteint en $x\in\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

**Question 32**

a) 500 personnes

b) Environ 2085 personnes

c) 1,96 semaines

d) $\lim_{t\to\infty} N(t) = 2500$ personnes

e) $N'(2) = 467,24$ personnes/semaine

f) $\lim_{t\to\infty} N'(t) = 0$ personnes (il faut mettre en évidence les termes dominants)

g) Il faut trouver le maximum de $N'(t)$. Comme $N''(t') < 0$ pour tout $x>0$, $N'(t)$ est maximale lorsque $t=0$.

**Question 33**

$\theta = \frac{\pi}{4}$

**Question 34**

$\theta = \frac{\pi}{2}$

**Question 35**

À $2\sqrt{26}$cm.

**Question 36**

$\theta = \frac{\pi}{3}$ rad

**Question 37**

$y = x+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi}{4}$

**Question 38**

$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{2}{5}$ rad/s

**Question 39**

$e^{13/4} \approx 25,79$ ans

**Question 40**

min. relatif en $(0,0)$

**Question 41**

$x = 8$

**Question 42**

$\theta = \sqrt{2}\pi$ rad $\approx 254,56°$

**Question 43**

$h = \sqrt{2}$m

**Question 44**

a) Aucun max. relatif, min. relatifs en $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ et en $(1,0)$.

b) max. relatifs en $(2k\pi,2)$, min. relatifs en $\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi,-2\right)$.

**Question 45**

Environ 9,87 m

**Question 46**

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x\ln 3}$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4x\sqrt{\ln\sqrt{x}}}$

c) $\frac{dy}{dx} = -2\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^x}\ln 3$

d) $\frac{dy}{dx} = 5(e^x+2^x)^4(e^x+2^x\ln 2)$

e) $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}$

f) $\frac{dy}{dx} = 6x^2e^{x^3}\tan\left(e^{x^3}\right)\sec^2\left(e^{x^3}\right)$

g) $\frac{dy}{dx} = \frac{-3\sin 3x+6\cos^2 2x\sin 2x}{\ln 10(\cos 3x-\cos^3 2x)}$

h) $\frac{dy}{dx} = (2^x\ln 2-\sin x)\cos(2^x+\cos x)$

i) $\frac{dy}{dx} = \left(12x^3-2e^x\right)\cot\left(3x^4 2e^x-3x^4\right)$

j) $\frac{dy}{dx} = x\tan\sqrt{\sec x^2}-\frac{\csc^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

k) $\frac{dy}{dx} = 2x\cot\sqrt[3]{x}-\frac{\sqrt[3]{x^4}}{3}\csc\sqrt[3]{x}$

l) $\frac{dy}{dx} = \cos x^2\tan\left(\sin x^2\right)\sqrt{\sec(\sin x^2)}$

m) $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{(1+e^{2x})\arctan(e^x)}$

n) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$

o) $\frac{dy}{dx} = \frac{1-\ln x}{x^2+\ln^2 x}$

**Question 47**

Laissé à l'étudiant.

**Question 48**

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{ye^x\ln y-y^2\sec^2 x}{y\tan x-e^x}$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{1-2x^2y^2\cos\left(x^2y^2\right)}{2x^3y^2\cos(x^2y^2)}$

c) $\frac{dy}{dx} = \frac{2y\sqrt{1-e^{2y}}}{2\sqrt{y}e^y-x\sqrt{1-e^{2y}}}$

**Question 49**

a) $k=1$

b) Oui, car $f$ est continue et $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x)$

c) Non

d) Non, car $f$ n'est pas continue.

**Question 50**

$f'(x) = 10\cot 2x+12\tan 3x-\frac{x}{x^2+5}$

**Question 51**

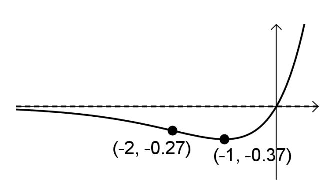
a) $\frac{dy}{dx} = x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$

b) $\frac{dy}{dx} = (\sin x)^{\arctan x}\left(\frac{\ln(\sin x)}{1+x^2}+\cot x\arctan x\right)$

**Question 52**

$f^{(n)}(x) = 3\cdot 4^n e^{4x}$

**Question 53**




**Question 54**

$\theta = \arctan\sqrt[3]{2} \approx 52°$

**Question 55**

À 5,66 m du mur de 5 m.