Yannick Delbecque — Département de mathématiques, Cégep de Saint-Laurent
Calcul différentiel — 201-NYA — Automne 2017

Examen formatif 2

Question 1
Déterminer les dérivées demandées. Simplifier les résultats.

a) $f'(x)$ si $f(x) = \dfrac{100}{x^{100}} - \pi^2 x^2 + \sqrt[100]{\dfrac{1}{x^3}} + \dfrac{\pi^{100}}{x^{100}}$

b) $f'(x)$ si $f(x) = \dfrac{3}{5\sqrt[3]{x^5}}$ sans utiliser la règle du quotient !

c) y' si $y = \left(2x^2-3\right)^2 (x+1)^3$

d) $f'(t)$ si $f(t) = \dfrac{(t+2)}{\sqrt{t-1}}$

e) $f'(x)$ si $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x+1}}}$

f) $\frac{dy}{dx}$ si $y = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^7$

g) $f''(x)$ et $f^{(3)}(x)$ si $f(x) = 2x^3 + x^2 + x + 1$

Question 2
Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 - x - 1$.

a) Déterminer pour quelle valeur de x la tangente au graphe de f est parallèle à la droite d'équation $y = -\frac{26x}{27} + 31$.

b) Donner un exemple graphique qui montre qu'il est possible d'avoir plus d'une solution à ce problème, c'est-à-dire plus d'une droite tangente de même pente.

Question 3
Soit C l'hyperbole d'équation

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 3$$

Déterminer l'équation de la tangente à C au point $(4,3)$.

Question 4
Soit C la courbe définie par l'équation

$$(x^3-1)y^2 = 1.$$

a) Déterminer la pente de la tangente en un point (x,y) sur la courbe au point à l'aide de la dérivation implicite.

b) L'affirmation suivante est-elle vraie ?
« Comme y' vaut $6/7$ au point $(2,1)$, la pente de la tangente à C au point $(2,1)$ est $6/7$. »
Expliquer votre réponse.

Question 5
Prouver que si $f'(x)$ existe, alors

$$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} f'(x)$$

à l'aide de la définition de la dérivée et des propriétés des limites (et sans utiliser les propriétés de la dérivée, y compris la règle de chaine). (Indice : utilisez le conjugué)

Question 6
La surface d'une sphère est liée à son rayon par l'équation $S = 4\pi r^2$. Le rayon augmente à une vitesse constante de $\frac{1}{2}$ cm$/s$, à quelle vitesse grandi la surface de la sphère au moment où son rayon est de 100 cm ?

Question 7
(bonus...) Calculez les dérivées suivantes. Il n'est pas nécessaire de simplifier les résultats !

a) $f(x) = (1+2x)^2 \sqrt[3]{1-x^2}$

b) $f(x) = \dfrac{(3x-2)^2}{(x-1)\sqrt{x}}$

Solutions

Question 1

a) $f'(x) = -\frac{10000}{x^{101}} - 2\pi^2 x - \frac{3}{100}\frac{1}{x^{103/100}} - \frac{100\pi^{100}}{x^{101}}$

b)
$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{5\sqrt[3]{x^5}}\right)' &= \frac{3}{5}\left(x^{-5/3}\right)' \\ &= \frac{-15}{15}x^{-8/3} \\ &= -\frac{1}{\sqrt[3]{x^8}}\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}f'(x) &= 8\left(2x^2-3\right)(x+1)^3\,x + 3\left(2x^2-3\right)^2(x+1)^2 \\ &= (2x^2-3)(x+1)^2(14x^2+8x-9)\end{aligned}$$

d) $f'(t) = \frac{t-4}{2\sqrt{(t-1)^3}}$

e) $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{\left(x+\sqrt{x+1}\right)^3}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)$

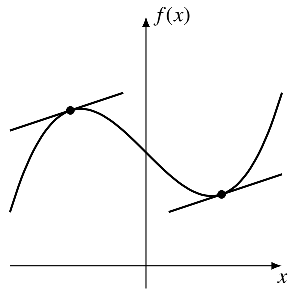
f) $f'(x) = -\frac{14(x+1)^6}{(x-1)^8}$

g) $f'(x) = 6x^2+2x+1$, $f''(x) = 12x+2$, $f^{(3)}(x) = 12$.

Question 2

a) La pente de la droite donnée est $-\frac{26}{27}$. On veut donc les points du graphe de f tels que $f'(x) = -\frac{26}{27}$. En dérivant, on trouve que $f'(x) = 3x^2-1$. On doit donc résoudre
$$3x^2 - 1 = -\frac{26}{27}.$$
En isolant, on trouve que
$$x = \pm\frac{1}{9}.$$

b) Voici le graphe d'une fonction qui a deux solutions au problème.



Question 3

On trouve la pente de la tangente au point $(4,3)$ à l'aide de la dérivation implicite. On fait l'hypothèse que $y = f(x)$. En dérivant chaque membre de l'égalité $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 3$ par rapport à x, on obtient
$$\frac{x}{2} - \frac{2yy'}{9} = 0.$$
En isolant y', on obtient que $\frac{9x}{4y}$. Au point $(4,3)$, $y' = \frac{9(4)}{4(3)} = 3$.

Comme la droite tangente est de pente 3 et passe par le point $(4,3)$ (qui est bien sur l'hyperbole !), l'équation de la droite est
$$y = 3x - 9$$

Question 4

a) On dérive chaque membre de l'équation $(x^3-1)y^2 = 1$ pour obtenir
$$3x^2y^2 + 2(x^3-1)yy' = 0.$$
En isolant y', on trouve que $y' = -\frac{3x^2y}{2(x^3-1)}$.

b) Même si on peut évaluer y' au point $(2,1)$, la valeur obtenue n'est pas la pente de la tangente à C car le point $(2,1)$ n'est pas sur la courbe C : en substituant dans l'équation qui définit C, on trouve
$$(2^3-1)1^1 \neq 1.$$
L'expression obtenue pour y' est valable uniquement pour les (x,y) qui satisfont l'équation définissant C.

Question 5

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{f(x)}\right)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{f(x+h)}-\sqrt{f(x)}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left(\sqrt{f(x+h)}-\sqrt{f(x)}\right)\frac{1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left(\sqrt{f(x+h)}-\sqrt{f(x)}\right)\frac{\sqrt{f(x+h)}+\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(x+h)}+\sqrt{f(x)}}\frac{1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(f(x+h)-f(x))\frac{1}{\sqrt{f(x+h)}+\sqrt{f(x)}}\frac{1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{f(x+h)}+\sqrt{f(x)}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{f(x+h)}+\sqrt{f(x)}}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{f(x)}}f'(x)\end{aligned}$$

Question 6

Comme $S = 4\pi r^2$, on a que
$$\frac{dS}{dt} = 8\pi r\frac{dr}{dt}.$$
Quand $r = 100$ et $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2}$, on obtient
$$\frac{dS}{dt} = 8\pi(100)\left(\frac{1}{2}\right) = 400\pi.$$

Question 7

a) $4(1+2x)\sqrt[3]{1-x^2} - \frac{2x(1+2x)^2}{3(1-x^2)^{2/3}}$

b) $\frac{6(3x-2)(x-1)\sqrt{x} - (3x-2)^2\left(\sqrt{x}+\frac{(x-1)}{2\sqrt{x}}\right)}{x(x-1)^2}$