Yannick Delbecque — Département de mathématiques, Cégep de Saint-Laurent
Calcul différentiel — 201-NYA — Automne 2017

Examen formatif 3

Question 1
Évaluer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2+4}{x^2-4}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} (x-1)^2-(x-1)$

Question 2
Expliquer, *sans utiliser la notion de dérivée*, pourquoi la fonction $f(x)=x^2$ n'est pas croissante sur $[-1,1]$.

Question 3
Vrai ou faux ?

a) Si $f'(a)=0$ alors f a un maximum ou un minimum en $x=a$.
b) Si $f(x)$ est une fonction polynômiale de degré 5, f peut avoir au plus 4 minimums ou maximums.
c) Si $f''(x)>0$ sur $[-2,\sqrt{5}]$, alors f est croissante sur $[-2,\sqrt{5}]$
d) Une fonction peut être à la fois concave vers le haut et décroissante.
e) Si $f'(a)>0$, alors $f''(a)>0$.

Question 4
Esquissez la fonction dont le tableau de variation est le suivant.

x	$-\infty$		-3		-1		1		2		3		4		5		∞
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	$\nexists$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	2				-4				3				0				2

Question 5
Déterminer le domaine, les valeurs critiques de la dérivée première, les minimums et les maximums et faire une esquisse de la fonction définie par

$$f(x)=x\sqrt{2-x^2}.$$

Question 6
Faire l'analyse de la concavité de la fonction

$$f(x)=2x+\sqrt[3]{(1-x)^5}.$$

Déterminer les valeurs critiques de f'', les points d'inflexions et faire une esquisse de la fonction basée sur ces données.

Question 7
Faire l'analyse complète des deux fonctions suivantes. Étudier la croissance, la concavité, les maximums, minimums, les points d'inflexion, et les asymptotes. Faire l'esquisse de la fonction.

a) $f(x)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^2}{2}-2x+3$ b) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{(x-2)^2}$

Question 8
On créé un piste de course de 400 m dont l'intérieur consiste en un rectangle ayant un demi-cercle à chacun de ses bouts. Si on veut maximiser la superficie du rectangle à l'intérieur de la piste, quelles doivent être ses dimensions ?

Solutions

Question 1

a) $\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+4}{x^2-4} = \frac{8}{0^-} = -\infty$

b) (Forme $\infty - \infty$)
$\lim_{x\to\infty} (x-1)^2 - (x-1) =$
$\lim_{x\to\infty} (x-1)((x-1)-1) =$
$\infty \cdot \infty = \infty$ (autre possibilité : commencer par développer $(x-1)^2$)

Question 2

Comme $f(-1) = 1 > 0 = f(0)$, la fonction ne peut pas être croissante sur $[-1, 1]$.

Question 3

a) Faux

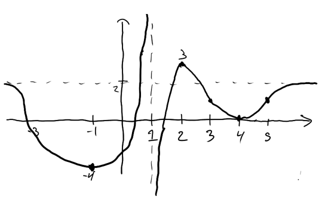
b) Vrai

c) Faux (elle est concave vers le haut)

d) Vrai (par exemple x^2 est concave vers le haut et décroissante pour $x < 0$)

e) Faux

Question 4



Question 5

Le domaine de la fonction est $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

Après simplification, la dérivée de la fonction est

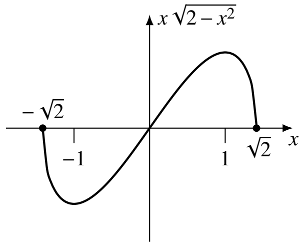
$$f'(x) = -\frac{2(x+1)(x-1)}{\sqrt{2-x^2}}.$$

Ses valeurs critiques sont

- $f'(x) = 0$ en $x = -1$ et $x = 1$
- $f'(x)\nexists$ (et bouts !) en $x = -\sqrt{2}, \sqrt{2}$.

Tableau de variation :

x	$-\sqrt{2}$		-1		1		$\sqrt{2}$
$f'(x)$	$\nexists$	-	0	+	0	-	$\nexists$



Question 6

$f'(x) = 2 - \frac{5}{3}\sqrt[3]{(1-x)^2}$

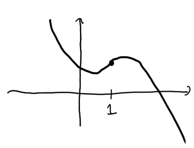
$$f''(x) = \frac{10}{9\sqrt[3]{1-x}}$$

Le seul point critique de f'' est $x = 1$, où $f''(x)\nexists$. Le tableau des signes de f'' :

x		1	
$f''(x)$	+	$\exists$	-

La fonction est donc concave vers le haut sur $]-\infty, 1[$, concave vers le bas sur $]1, \infty[$, et elle a un point d'inflexion en $x = 1$.

Une esquisse possible :



Question 7

a) Comme f est une fonction polynomiale, elle est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

A.H.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - 2x + 3 = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - 2x + 3 = \infty$$

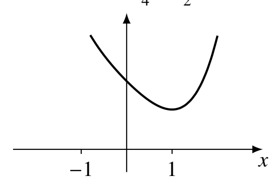
A.V. : Il n'y a pas de division par zéro, donc pas d'asymptotes verticales.

$f'(x) = (x^2 + x + 2)(x-1)$; le seul point critique de f' est $x = 1$.

$f''(x) = 3x^2 + 1$; f'' n'a aucun point critique.

x	$-\infty$		1		∞
$f'(x)$		-	0	+	
$f''(x)$		+	+	+	
$f(x)$	∞	↘	Min	↗	∞

$\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - 2x + 3$



b) Domaine de f : $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$f'(x) = -\frac{4(x-\frac{1}{2})}{(x-2)^3}$

Points critiques : $f'(x) = 0$ si $x = 1/2$, $f'(x)\nexists$ si $x = 2$.

$f''(x) = \frac{8(x+\frac{1}{4})}{(x-2)^4}$.

Points critiques : $f''(x) = 0$ si $x = -\frac{1}{4}$; $f''(x)\nexists$ si $x = 2$.

A.H.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{(x-2)^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{(x-2)^2} = 1$$

La droite $y = 1$ est une A.H.

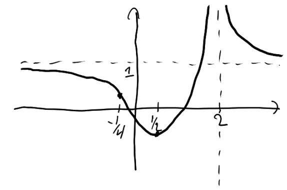
A.V.

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-1}{(x-2)} = \infty$$

(les limites $x \to 2^+$ et $x \to 2^-$ donnent le même résultat.)

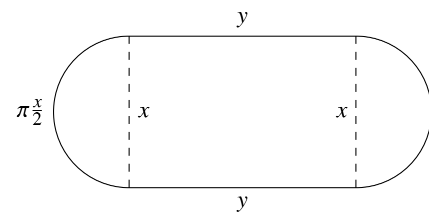
x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		2		∞
$f'(x)$		-	-	-	0	+	$\nexists$	-	
$f''(x)$		-	0	+	+	+	$\nexists$	+	
$f(x)$	1	↘	INF	↘	MIN	↗	∞	↘	1

Esquisse du graphe de f :



Question 8

Appelons x la largeur du rectangle central et y sa longueur ; x est aussi le diamètre des demi-cercles à chacun des bouts de la piste.



Le périmètre total est

$$\pi x + 2y = 400$$

et la superficie du rectangle est $A = xy$.

On trouve donc que $y = \frac{400 - \pi x}{2}$ et que

$$A = x\frac{400-\pi x}{2} = 200x - \frac{\pi}{2}x^2$$

On veut maximiser A. En dérivant, on trouve

$$A' = 200 - \pi x.$$

On a que $A' = 0$ si et seulement si $x = \frac{200}{\pi}$.

On vérifie que l'on a bien un maximum à l'aide du test de la dérivée seconde. Comme $A'' = -\pi$, la dérivée seconde est toujours négative et on a un maximum.

Les dimensions du rectangle sont $x = \frac{200}{\pi}$ et $y = 100$.