Yannick Delbecque — Département de mathématiques, Cégep de St-Laurent
Calcul différentiel — 201-NYA — Automne 2017

Mini-test limite et continuité

La durée de l'examen est de 30 minutes, aucune documentation n'est permise et l'usage de calculateurs électroniques est interdit.

Donner vos réponses sur une feuille séparée. Toute réponse doit comporter une démarche, à mois d'avis contraire.

Question 1 (4 × 2 points)
Évaluer les limites suivantes, si elles existent.

a) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+3x^2+3x+2}{x^2+x-2}$

b) $\lim_{x\to 2} \frac{1+x\sqrt{2}}{\sqrt{x}}$

c) $\lim_{x\to 2^-} \sqrt{x-2}$

d) $\lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{5}}{x^2-4}$

Question 2 (4 points)
Vrai ou faux ? (Il n'est pas nécessaire de justifier vos réponses)

a) Si $a \notin \mathrm{dom}(f)$ alors f n'est pas continue en $x = a$.

b) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ pour n'importe quelle fonction f.

c) Si $f(a)$ n'est pas défini, alors f a une discontinuité essentielle en $x = a$.

d) $\lim_{x\to a} \frac{\log(\pi)}{\cos(3)} f(x) = \frac{\log(\pi)}{\cos(3)} \lim_{x\to a} f(x)$ si la limite du membre de droite existe.

Solutions

Question 1

a) En tentant d'évaluer la limite directement, on vérifie que c'est une forme « $0/0$ ».

En divisant x^3+3x^2+3x+2 et x^2+x-2 par $(x+2)$, on obtient

$$x^3+3x^2+3x+2 = (x+2)(x^2+x+1)$$
$$x^2+x-2 = (x+2)(x-1)$$

Cela permet de calculer la limite comme suit.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-2}\frac{x^3+3x^2+3x+2}{x^2+x-2} &= \lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x^2+x+1)}{(x+2)(x-1)}\\
&= \lim_{x\to-2}\frac{x^2+x+1}{x-1}\\
&= \frac{(-2)^2+(-2)+1}{(-2)-1}\\
&= -1
\end{aligned}$$

b) C'est une limite d'une fonction algébrique qui est continue partout où elle est définie. On peut donc évaluer la limite à l'aide de la continuité.

$$\lim_{x\to 2}\frac{1+x\sqrt{2}}{\sqrt{x}} = \frac{1+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

Ne pas faire la mauvaise simplification des $\sqrt{2}$:

$$\frac{1+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \neq \frac{1+2}{1}$$

c) $\lim_{x\to 2^-}\sqrt{x-2} = \sqrt{0^-}\nexists$

d) On a donc une forme « $0/0$ » :

$$\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{5}}{x^2-4} = \text{,,}\frac{0}{0}\text{,,}$$

Pour lever l'indétermination, on transforme la fonction dont on veut connaitre la limite. Le facteur à simplifier est $(x-2)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{5}}{x^2-4} &= \lim_{x\to 2}\frac{\left(\frac{5-(2x+1)}{5(2x+1)}\right)}{x^2-4}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{\left(\frac{-2x+4}{5(2x+1)}\right)}{x^2-4}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{\left(\frac{-2(x-2)}{5(2x+1)}\right)}{(x-2)(x+2)}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{-2(x-2)}{5(2x+1)}\frac{1}{(x-2)(x+2)}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{-2}{5(2x+1)(x+2)}\\
&= \frac{-2}{5(2(2)+1)((2)+2)}\\
&= \frac{-2}{100}\\
&= -\frac{1}{50}
\end{aligned}$$

Question 2

a) Vrai, car si $a\notin \mathrm{dom}(f)$, $f(a)$ n'est pas défini et on ne peut avoir $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

b) Faux, car $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ ssi f est continue en $x=a$. Cela est donc vrai uniquement pour les fonctions continues en a.

c) Faux, car $\lim_{x\to a} f(x)$ pourrait exister.

d) Vrai, car $\frac{\log(\pi)}{\cos(3)}$ est une constante, et par les propriétés des limites, on a que $\lim_{x\to a} Cf(x) = C\lim_{x\to a} f(x)$ pour n'importe quelle constante $C\in\mathbb{R}$ si la limite du membre de droite existe.