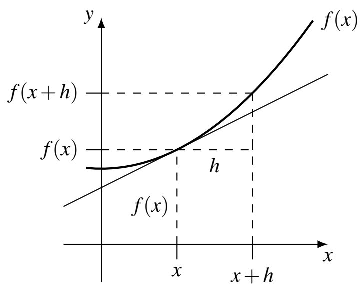
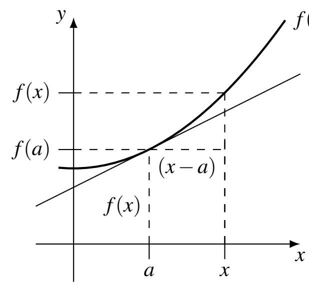
Formulaire de dérivation

Définition





Définition de la dérivée

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Équation de la droite tangente en $(x,f(x))$ (y fonction de h)

$$y=f(x)+f'(x)h$$

Approximation de $f(x+h)$

$$f(x+h)\approx f(x)+f'(x)h$$

Définition de la dérivée

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Équation de la droite tangente

$$y=f(a)+f'(a)(x-a)$$

Approximation par la droite tangente

$$f(x)\approx f(a)+f'(a)(x-a)$$

Notations

Différentes notations pour la dérivée de $y=f(x)=x^2$.

Notations pour la dérivée première					
$f'(x)$	y'	$\left(x^2\right)'$	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{df(x)}{dx}$	$\frac{dx^2}{dx}$
$f'(a)$	$y'\vert_{x=a}$	$\left(x^2\right)'\Big\vert_{x=a}$	$\frac{dy}{dx}\Big\vert_{x=a}$	$\frac{df(x)}{dx}\Big\vert_{x=a}$	$\frac{dx^2}{dx}\Big\vert_{x=a}$

Notations pour la dérivée seconde					
$f''(x)$	y''	$\left(x^2\right)''$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	$\frac{d^2f(x)}{dx^2}$	$\frac{d^2x^2}{dx^2}$
$f''(a)$	$y''\vert_{x=a}$	$\left(x^2\right)''\Big\vert_{x=a}$	$\frac{d^2y}{dx^2}\Big\vert_{x=a}$	$\frac{d^2f(x)}{dx^2}\Big\vert_{x=a}$	$\frac{d^2x^2}{dx^2}\Big\vert_{x=a}$

Propriétés de la dérivée

Linéarité

$$\left(Cf(x)\right)'=Cf'(x),\ C\in\mathbb{R}$$

$$\left(f(x)+g(x)\right)'=f'(x)+g'(x)$$

Produits et quotients

$$\left(f(x)g(x)\right)'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

Règle de chaine

$$\Big(f\big(g(x)\big)\Big)'=f'\big(g(x)\big)g'(x)$$

Fonctions algébriques

$$(A)'=0,\ A\in\mathbb{R} \qquad \left(x^a\right)'=ax^{(a-1)},\ a\in\mathbb{R}$$

Fonctions exponentielles et logarithmes

$$\left(\mathrm{e}^x\right)'=\mathrm{e}^x \qquad \left(\ln(x)\right)'=\frac{1}{x}$$

$$\left(b^x\right)'=b^x\ln(b) \qquad \left(\log_b(x)\right)'=\frac{1}{x\ln(b)}$$

Fonctions trigonométriques

$$\left(\sin(x)\right)'=\cos(x) \qquad \left(\cos(x)\right)'=-\sin(x)$$

$$\left(\tan(x)\right)'=\sec^2(x) \qquad \left(\cot(x)\right)'=-\csc^2(x)$$

$$\left(\sec(x)\right)'=\sec(x)\tan(x) \qquad \left(\csc(x)\right)'=-\csc(x)\cot(x)$$

Fonctions trigonométriques inverses

$$\left(\mathrm{asin}(x)\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \left(\mathrm{acos}(x)\right)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\left(\mathrm{atan}(x)\right)'=\frac{1}{x^2+1} \qquad \left(\mathrm{actg}(x)\right)'=\frac{-1}{x^2+1}$$

$$\left(\mathrm{asec}(x)\right)'=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \qquad \left(\mathrm{acsc}(x)\right)'=\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Dérivation logarithmique

Pour dériver une fonction de la forme u^v.

Truc 1 : utiliser l'identité $A=\mathrm{e}^{\ln(A)}$

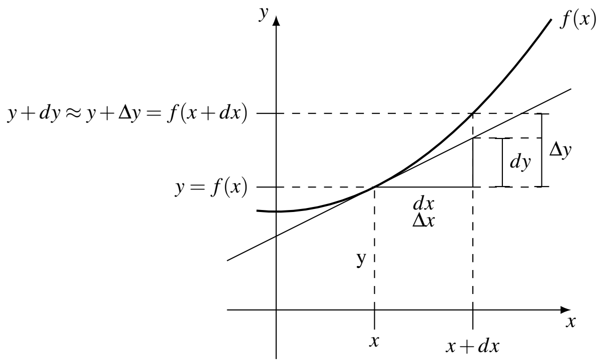
$$\left(u^v\right)'=\left(\mathrm{e}^{\ln(u^v)}\right)'=\left(\mathrm{e}^{v\ln(u)}\right)'$$

Truc 2 : appliquer ln et dérivation implicite

$$y=u^v \iff \ln(y)=\ln(u^v) \iff \ln(y)=v\ln(u)$$

$$\left(\ln(y)\right)'=\left(v\ln(u)\right)' \Longrightarrow \frac{y'}{y}=\left(v\ln(u)\right)'$$

Définition de la différentielle



Approximation de Δy par dy si Δx est petit:

$$\Delta y \approx dy = f'(x)\,dx.$$

Notation différentielle avec $y = f(x) = x^2$:

$$dy = y'dx = f'(x)\,dx = 2x\,dx.$$

Rarement utilisé en calcul différentiel de base, mais valable:

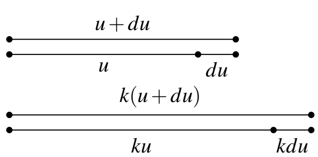
$$d^2y = y''dx^2 = f''(x)\,dx^2 = x^2\,dx^2.$$

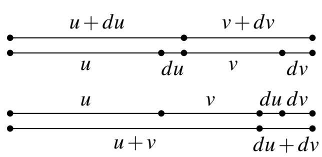
Propriétés des différentielles

Linéarité

u et v fonctions de x

$$d(Cu) = C\,du,\; C \in \mathbb{R} \qquad d\Big(u+v\Big) = du + dv$$

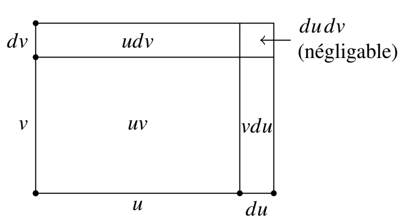




Produits et quotients

u et v fonctions de x

$$d\big(uv\big) = v\,du + u\,dv \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$



Règle de chaine

z est fonction de y fonction de x

$$dz = \frac{dz}{dy}dy = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}dx$$

Règle générale de dérivation

$$\text{Si } u = f(x),\ \text{alors } du = f'(x)\,dx$$

Dérivabilité

$f(x)$ est dérivable en $x = a$ si

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\exists$$

Dérivée et continuité

Si $f'(a)$ existe, alors $f(x)$ est continue en $x = a$.

Si $f(x)$ n'est pas continue en $x = a$, alors $f'(x)$ n'existe pas.

Dérivée et croissance

$f(x)$ croissante entre a et b ssi

$$a \le x_1 \le x_2 \le b \implies f(x_1) \le f(x_2)$$

$f(x)$ décroissante entre a et b ssi

$$a \le x_1 \le x_2 \le b \implies f(x_1) \ge f(x_2)$$

$f'(a) > 0$ ssi $f(x)$ croissante en $x = a$

$f'(a) < 0$ ssi $f(x)$ décroissante en $x = a$

Si $f(x)$ a un minimum ou un maximum en $x = a$, alors $f'(x) = 0$ ou $f'(x)\nexists$

Dérivée seconde et concavité

$f''(a) > 0$ ssi $f(x)$ concave vers le haut en $x = a$

$f''(a) < 0$ ssi $f(x)$ concave vers le bas en $x = a$

Si $f(x)$ a un point d'inflexion en $x = a$, alors $f''(x) = 0$ ou $f''(x)\nexists$