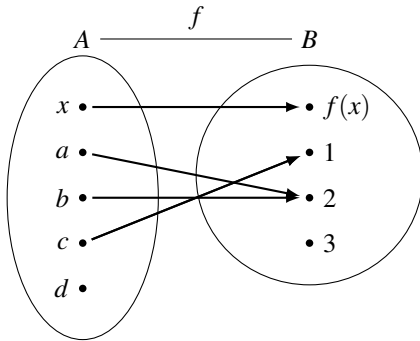


Résumé : fonctions élémentaires

Définition d'une fonction

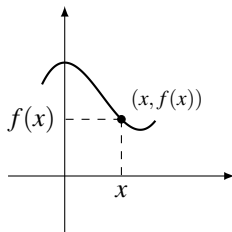
Notation et représentation graphique

Une fonction est une règle donnant au plus un élément $f(x)$ d'un ensemble B associé à chaque élément x de A . Notation : $f: A \rightarrow B$.



Le plus souvent dans les cours du collégial, A et B sont des ensembles de nombres réels ou de vecteurs $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$, etc. Les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont appelées *fonctions réelles*. Les fonctions réelles sont habituellement représentées par leur graphe.

Le graphe d'une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est l'ensemble des points de la forme $(x, f(x))$.



Domaine

Le domaine d'une fonction $f: A \rightarrow B$ est l'ensemble des $x \in A$ où $f(x)$ est défini. Notation :

$$\text{dom}(f) = \{a \mid f(a) \text{ est défini}\}.$$

Conditions déterminant le domaine des fonctions élémentaires :

$$\frac{A}{B} \text{ défini} \iff B \neq 0$$

$$\sqrt[n]{A} \text{ défini} \iff n \text{ impair ou } n \text{ pair et } A \geq 0$$

$$\log_b(A) \text{ défini} \iff A > 0$$

Différentes manières de définir une fonction

- Définition par une équation : $y = x^2$.
- Définition implicite par une équation : $x^2 - y = 0$.
- Définition en donnant l'effet de la fonction $f(x) = x^2$ ou encore $x \mapsto x^2$.

- Définition par parties (ou par morceaux) :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 1 \\ -x & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x^3 & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

Évaluation d'une fonction

Si f est définie par une expression algébrique, comme $f(x) = x^2 + x + 1$, on évalue $f(A)$ en remplaçant toutes les occurrences de x de l'expression algébrique par A . Par exemple

$$f(2) = 2^2 + 2 + 1$$

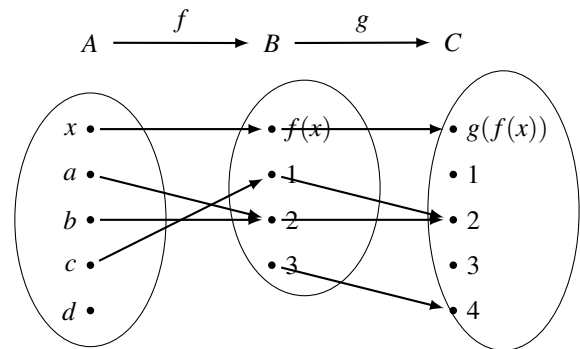
$$f(x+1) = (x+1)^2 + (x+1) + 1$$

$$f(x+h) = (x+h)^2 + (x+h) + 1$$

Composition de fonctions

Si $f: A \rightarrow B$ et $g: B \rightarrow C$, on définit la composition $f \circ g$ de f et g comme la fonction définie en appliquant d'abord g et ensuite f :

$$f \circ g(x) = f(g(x)).$$



Fonctions inverses

Deux fonctions f et g sont inverses l'une de l'autre si

$$f \circ g(x) = x \text{ et } g \circ f(x) = x.$$

On dénote la fonction inverse de f par f^{-1} .

Les fonctions inverses satisfont l'équivalence

$$f(x) = y \iff x = f^{-1}(y).$$

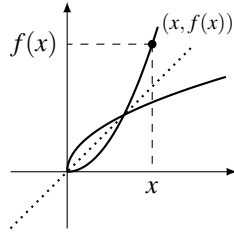
Si $y = f(x)$, on trouve donc f^{-1} en isolant x en fonction de y (si cela est possible) et en échangeant les x pour des y .

$$y = 2x + 1 \iff x = \frac{y-1}{2}$$

Donc $f(x) = 2x + 1$ a comme fonction inverse $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$.

La nouvelle relation trouvée de cette manière n'est pas nécessairement une fonction. Il faut souvent limiter f sur un domaine adéquat pour que f^{-1} soit une fonction.

Le graphe de la fonction inverse d'une fonction f est sa réflexion par la droite $y = x$ (qui a pour effet d'échanger x et y).



Quelques fonctions inverses ($C = \text{constante}$)

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$$

$$y = x + C \iff x = y - C$$

$$y = Cx \iff x = \frac{y}{C}$$

$$y = x^2 \iff x = \sqrt{y} \quad (x \geq 0)$$

$$y = b^x \iff x = \log_b(y)$$

$$y = e^x \iff x = \ln(x)$$

$$y = \sin(x) \iff x = \arcsin(y) \quad (-\pi/2 \leq x \leq \pi/2)$$

$$y = \cos(x) \iff x = \arccos(y) \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

$$y = \tan(x) \iff x = \arctan(y) \quad (-\pi/2 < x < \pi/2)$$

Fonctions polynomiales

Fonctions linéaires

Forme générale :

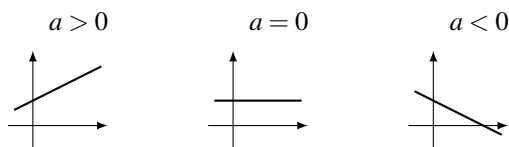
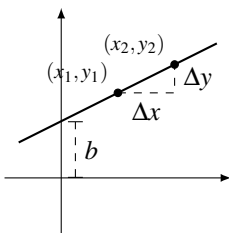
$$f(x) = ax + b$$

Passant par le point (x_0, y_0) et de pente a :

$$f(x) = a(x - x_0) + y_0$$

Ordonnée à l'origine : $b = f(0)$

$$\text{Pente : } a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Fonctions quadratiques

Forme polynomiale

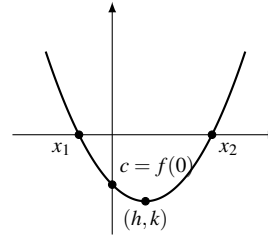
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Forme canonique

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

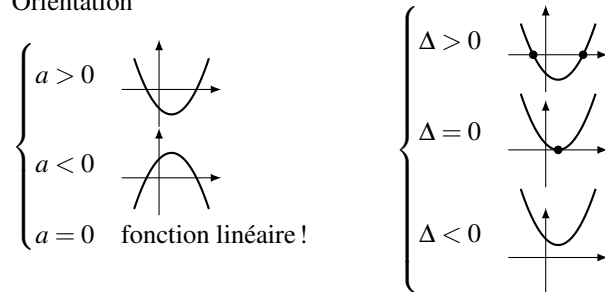
Forme factorisée

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$



Discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

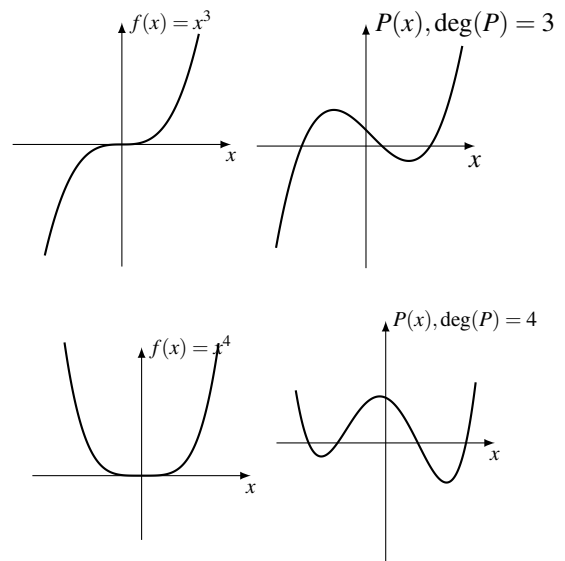
Orientation



Si on connaît trois points différents sur une parabole (en comptant le sommet pour deux), on peut déterminer tous les paramètres (et donc une fonction unique).

Fonctions polynomiales quelconques

Forme générale : $f(x) = P(x)$, où $P(x)$ est un polynôme. Domaine : $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$.



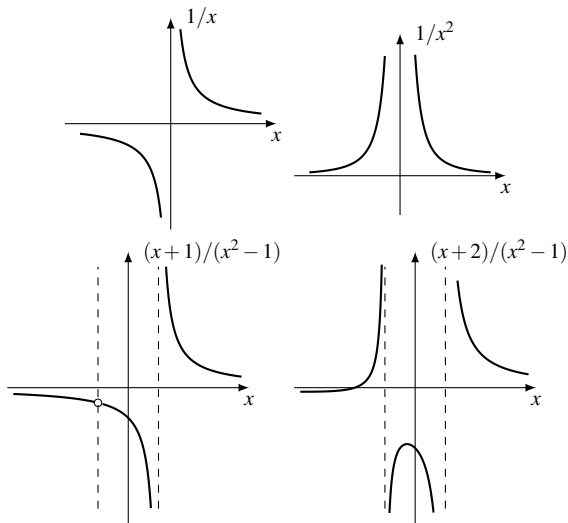
Zéros et extrémums.

- $f(x)$ peut avoir jusqu'à $\text{deg}(P)$ zéros.
- $f(x)$ peut avoir jusqu'à $\text{deg}(P) - 1$ extrémums.

Fonctions rationnelles

Forme générale : $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes. $\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$, asymptote ou discontinuité non essentielle à chaque $x \notin \text{dom}(f)$.

Les zéros de $f(x)$ sont les zéros de $P(x)$ qui sont dans $\text{dom}(f)$.

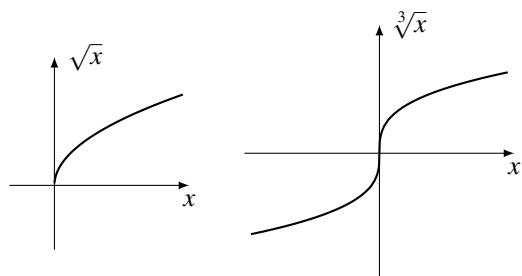


Fonctions algébriques

Fonctions que l'on peut définir à l'aide des opérations $+$, $-$, \times et \div , ainsi que des exposants fractionnaires. Toutes les fonctions rationnelles sont algébriques. Ce sont les fonctions que l'on obtient en isolant y dans des équations polynomiales de la forme $P(x, y) = 0$.

Pour déterminer le domaine d'une fonction algébrique, il faut utiliser les deux faits suivants :

- $\frac{A}{B}$ est défini ssi $B \neq 0$
- $\sqrt[n]{A}$ est toujours défini si n est impair, ou est défini ssi $A \geq 0$ si n est pair.

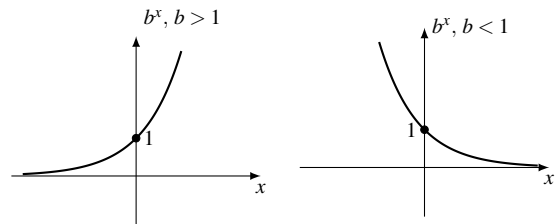


Fonctions transcendantes

Une fonction transcendante est une fonction qui n'est pas algébrique.

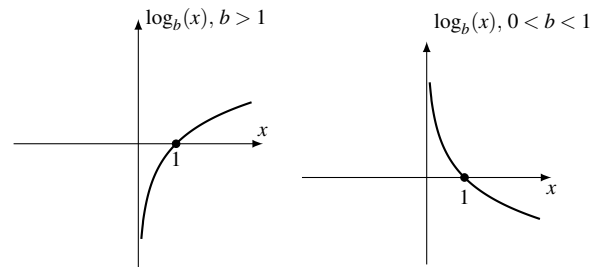
Fonctions exponentielles

Forme générale : $f(x) = Ab^x + k$, $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$



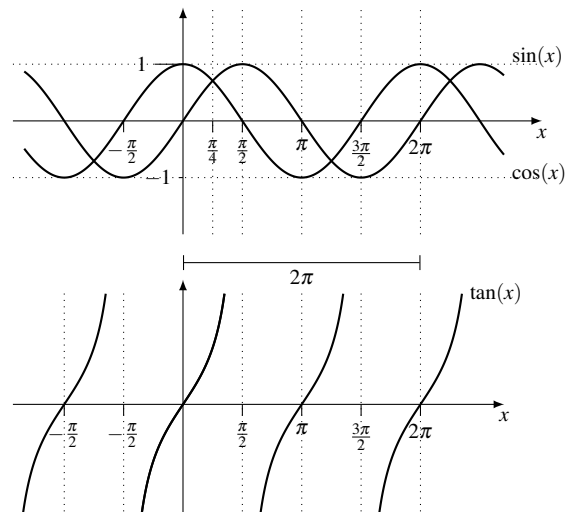
Fonctions logarithmiques

Forme générale : $f(x) = A \log_b(x - a) + C$ ($b > 0, b \neq 1$), $\text{dom}(f) = \{x \mid x - a > 0\}$



Fonctions trigonométriques

$f(x) = \sin(x)$, $\text{dom}(\sin) = \mathbb{R}$ $g(x) = \cos(x)$, $\text{dom}(\cos) = \mathbb{R}$
 $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, $\text{dom}(\tan) = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$



Fonctions sinusoidales

Forme générale :

$$f(x) = A \sin(\omega(x-h)) + k \quad \text{Déphasage temporel}$$

$$= A \sin(\omega x + \phi) + k \quad \text{Déphasage angulaire}$$

$$\text{dom}(\sin) = \mathbb{R}$$

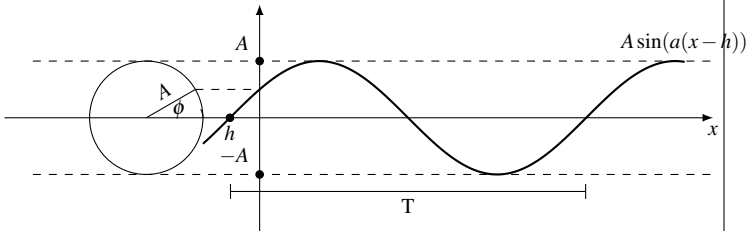
Amplitude : A

Vitesse angulaire ω

Période : $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Déphasage (temps) : $h = -\frac{\phi}{\omega}$

Déphasage (angle) : $\phi = -\omega h$



Fonctions définies par morceaux

Valeur absolue

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Propriétés de fonctions

Périodique (période T) $f(x+T) = f(x)$ (ex : $\sin(x)$)

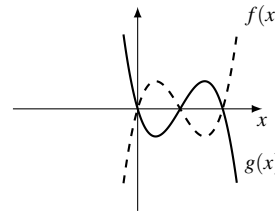
Paire $f(-x) = f(x)$ (ex : x^2 , $\cos(x)$)

Impaire $f(-x) = -f(x)$ (ex : x^3 , $\sin(x)$)

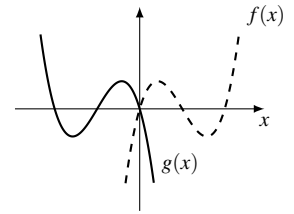
Transformation du graphe d'une fonction

Symétries

Symétrie par rapport à l'axe des x $g(x) = -f(x)$



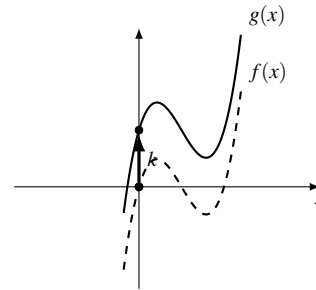
Symétrie par rapport à l'axe des y $g(x) = f(-x)$



Translation verticales et horizontales

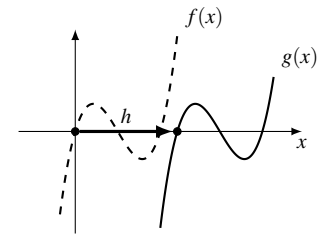
Translation verticale de k :

$$g(x) = f(x) + k$$



Translation horizontale de h :

$$g(x) = f(x-h)$$



Changements d'échelles

Facteur b horizontal :

$$g(x) = f\left(\frac{x}{b}\right)$$

Facteur a vertical :

$$g(x) = af(x)$$

