Algèbre linéaire et géométrie vectorielle

Nombres complexes

Par:
Martin-Pierre Huot

Objectifs

- Saisir les liens entre les différents ensembles de nombres.
- Comprendre ce qu’est un nombre complexe.
- Faire des opérations sur les nombres complexes.

Nombres entiers naturels ($\mathbb{N}$)

- Tous les nombres entiers positifs (0, 1, 2 ...)

- Addition

  $2 + 1 = 3$

- Multiplication

  $3 * 2 = 6$

Limites de $\mathbb{N}$

- Soustraction

$$6 - 1 = 5$$

Mais,

$$5 - 7 = ???$$

Nombres entiers relatifs ($\mathbb{Z}$)

- Tous les nombres entiers incluant les nombres négatifs (... -1, 0, 1, 2 ...)

- Soustraction

  $5 - 7 = -2$

Limites de $\mathbb{Z}$

- Division

$$9 \div 3 = 3$$

Mais,

$$7 \div 3 = ???$$

Nombres rationnels ($\mathbb{Q}$)

- Tous les nombres qui peuvent s'écrire sous forme fractionnaire (... -½, 0, ½, ¾, 1, 2 ...)

- Division

  $7 \div 3 =$ 7/3 ou 2 et 1/3

Limites de $\mathbb{Q}$

- Racine carrée

$$\sqrt{9} = 3$$

Mais,

$$\sqrt{2} = ???$$

Nombres réels ($\mathbb{R}$)

- Tous les nombres rationnels et les nombres irrationnels, c’est-à-dire dont le développement décimal est infini non-périodique (... -½, 0, ½, ¾, 1,$\sqrt{2}$, π ...)

- Racine carrée

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887\text{2...}$$

Limites de $\mathbb{R}$

- Racine carrée de nombres négatifs

  Résoudre l’équation :

  $x^2 + 1 = 0$

  $x = \sqrt{-1} = ???$

Nombres complexes ($\mathbb{C}$)

- On introduit le nombre i qui a la propriété :

  i^2 = -1

Donc la solution de x^2 + 1 = 0 est

x = $\sqrt{-1}$ = i

Nombres complexes ($\mathbb{C}$)

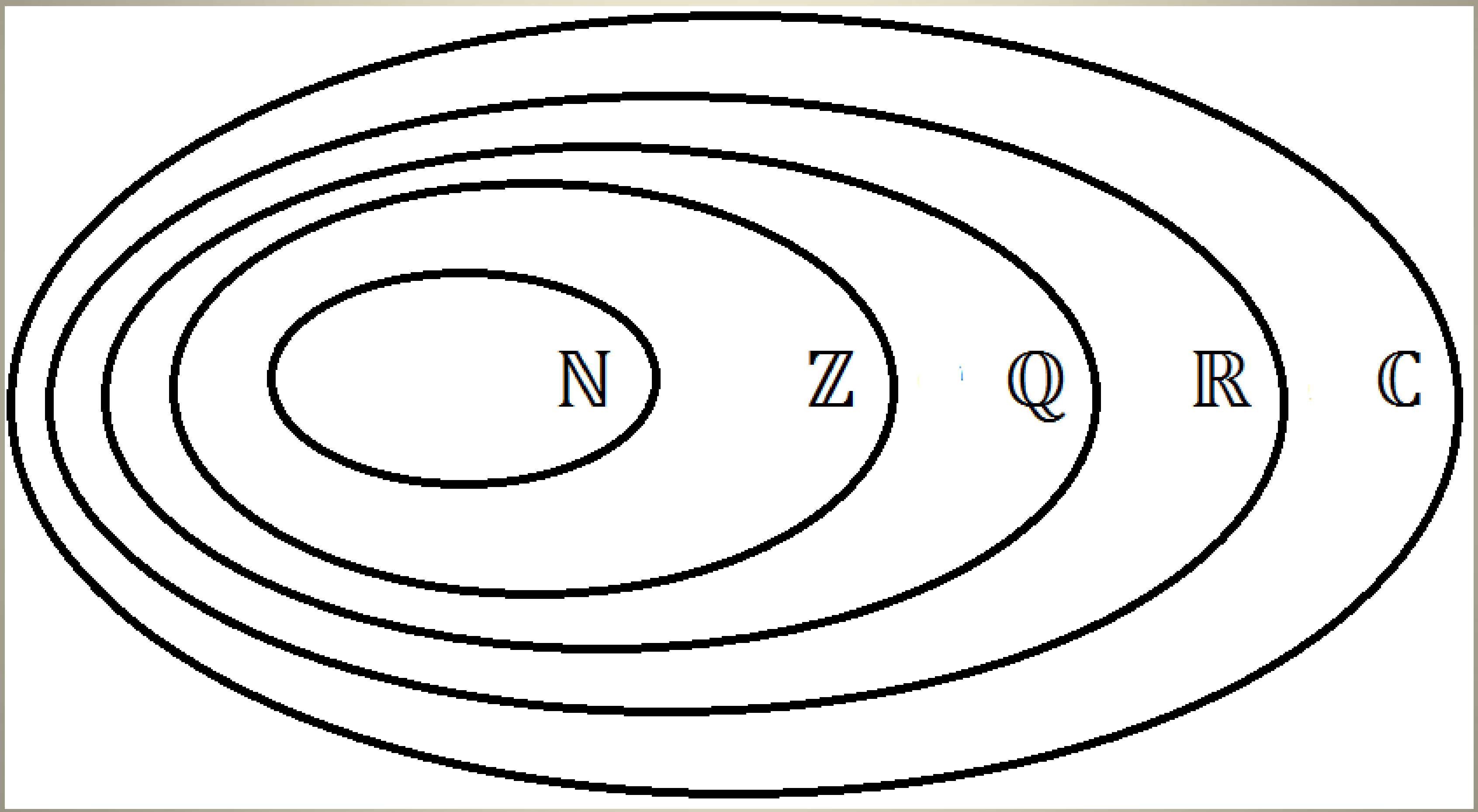
- Tout nombre complexe z peut s'écrire sous la forme :

$$z = a + ib \quad \text{où } a \text{ et } b \in \mathbb{R}$$

On appelle a la <u>partie réelle</u>

et b la <u>partie imaginaire</u>

Schéma des nombres



Addition

- Elle se fait partie par partie, c'est-à-dire que les parties réelles s'additionnent entre elles et les parties imaginaires aussi.

Ex:

$z1 = a + ib$ et $z2 = a' + ib'$

Alors,

$z1 + z2 = a + a' + i(b + b')$

Multiplication

- Elle se fait de façon distributive

Ex:

$z1 = a + ib$ et $z2 = a' + ib'$

Alors,

$$z1 * z2 = (a + ib) * (a' + ib')$$
$$= a*a' + a*ib' + ib*a' + ib*ib'$$
$$= a*a' - b*b' + i*(a*b' + b*a')$$

Conjugué complexe

- Soit z = a + ib

  Alors $\bar{z}$ = a – ib est le conjugué complexe de z

On a que z * $\bar{z}$ = (a + ib) * (a - ib)

$= a^2 - a*ib + ib*a - (ib)^2$

$= a^2 + b^2$

Qui est en fait un nombre purement réel

Division

- Pour faire la division complexe, on doit multiplier le nombre divisé et le diviseur par le conjugué complexe du diviseur.

Ex:

$$z1/_{z2} = \frac{z1 * \overline{z2}}{z2 * \overline{z2}}$$