

## Examen 3

### Question 1 (15 points)

Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  les matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Isoler  $X$  dans les équations suivantes.

a)  $AXB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b)  $A^T X = BC^T$

c)  $BX = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

### Question 2 (10 points)

Soit  $A$ ,  $B$  et  $C$  des matrices  $3 \times 3$  telles que  $\det(A) = 2$ ,  $\det(B) = -1$  et  $\det(C) = 3$ . Calculer le déterminant suivant à l'aide des propriétés des déterminants.

$$\det\left(A^{-1}((2B)^2 C^T)^{-1}\right)$$

### Question 3 (20 points)

Calculer l'inverse de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) avec la méthode de réduction de Gauss-Jordan

b) en utilisant la matrice adjointe

### Question 4 (10 points)

Calculer le déterminant de la matrice suivante.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

### Question 5 (10 points)

Écrire la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

comme un produit de matrices élémentaires et d'une matrice ERL.

### Question 6 (10 points)

Soit le système d'équation suivant:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f. \end{cases}$$

a) Donner une condition sur la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

qui permet de savoir quand le système d'équation a une solution unique.

b) En supposant que le système a une solution unique, donner une formule donnant  $x$  et  $y$  en fonction des paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  et  $f$ . (indice: écrire le système sous forme matricielle)

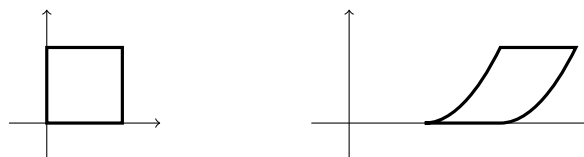
### Question 7 (10 points)

Soit  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la fonction définie par

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + 1 \\ y^2 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que la fonction  $T$  n'est pas linéaire.

b) Le graphique suivant présente l'effet de  $T$  sur le carré unité. Donner une raison géométrique pour laquelle la transformation ne peut pas être linéaire.



**Question 8** (10 points)

Trouver une matrice carrée  $2 \times 2$  telle que  $A \neq I$  et  $A^3 = I$ .

**Question 9** (60 points)

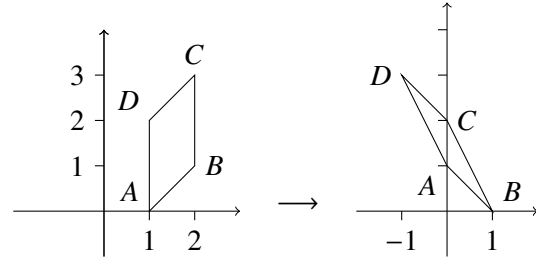
Déterminer la matrice associée aux applications linéaires suivantes.

a)  $T$  définie par  $T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

b) L'application linéaire  $T^{-1}$  inverse de celle donnée en a

c) un homothétie de facteur 2 suivie d'une rotation d'angle  $\pi/4$ .

d) la transformation qui envoie la figure de gauche sur la figure de droite



e) l'application linéaire définie par  $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$ .

**Question 10** (10 points)

**Ne pas faire cette question** Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres (facteurs d'invariance et directions invariantes) de l'application linéaire ayant comme représentation matricielle

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$