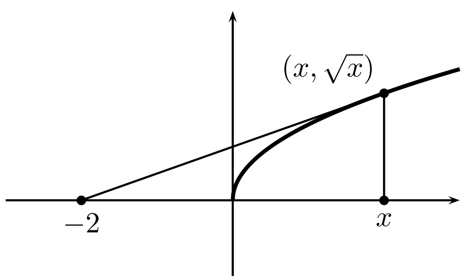
Département de mathématiques – Cégep de Saint-Laurent
Mathématiques appliquées à la construction 2 – 201-714
Hiver 2008 – Professeur : Yannick Delbecque

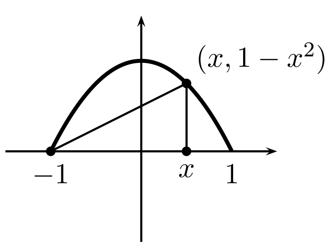
Examen préparatoire 3

Question 1
Dériver les fonctions suivantes.
a) $\dfrac{x^{10}}{100} - 5x^5 + \dfrac{5}{2x^3} + \pi^2$
b) $\ln(x^2)$
c) $\ln(2x)\left(x^3 - x\right)$
d) $(x^4 - x^2 + x - 1)\sqrt[3]{x}$
e) $\sqrt{\dfrac{1}{\sin(x)}}$

Question 2
Déterminer x tel que la droite passant par $(-2, 0)$ et $(x, \sqrt{x})$ est tangente à la fonction $f(x) = \sqrt{x}$.



Question 3
Considérer le triangle rectangle ayant comme sommets $(-1, 0)$, $(x, 1-x^2)$ et $(x, 0)$ comme illustré dans la figure suivante.



a) Déterminer la fonction $A(x)$ qui donne l'aire du triangle de la figure en fonction de x.
b) Déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'aire du triangle dans la figure est maximale ou minimale.
c) Calculer l'aire du triangle correspondant à chacune des valeurs trouvées. Quel est l'aire maximale possible ?

Question 4
Calculer les intégrales indéfinies suivantes.
a) $\displaystyle\int 3x^2 - \sqrt{x}\, dx$
b) $\displaystyle\int \frac{1}{2x+1}\, dx$
c) $\displaystyle\int \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{2x}}\, dx$

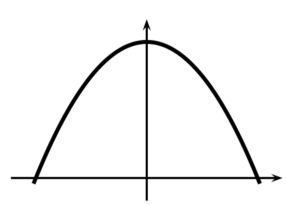
Question 5
Calculer les intégrales définies suivantes.
a) $\displaystyle\int_0^1 6x^3 - 4x^2 + 4x - 1\, dx$
b) $\displaystyle\int_1^{e} \frac{1}{x}\, dx$
c) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{x}{2}\right)\, dx$

Question 6

a) Vérifier à l'aide de la dérivée que

$$\int \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\, dx = \frac{\ln\left(x^2\right)}{2} - \frac{1}{x} + C.$$

b) Déterminer l'aire comprise entre la parabole d'équation $y = 12 - 3x^2$ et l'axe des x.



Solutions

Question 1

a) $\frac{x^9}{10} - 25x^4 - \frac{15}{2x^4}$

b) $\dfrac{2}{x}$

c) $x^2 - 1 + (3x^2 - 1)\ln(2x)$

d) $\dfrac{13x^4 - 7x^2 + 4x - 1}{3x^{2/3}}$

e) $-\frac{\cos(x)}{2(\sin(x))^{3/2}}$

Question 2

On a que $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ est la pente de la tangente à f en x. La pente de la droite passant par $(-2, 0)$ et $(x, \sqrt{x})$ est

$$\frac{\sqrt{x} - 0}{x - (-2)} = \frac{\sqrt{x}}{x + 2}.$$

On doit donc avoir que

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x}}{x+2} &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ 2x &= x + 2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Question 3

a) $A(x) = \dfrac{(x+1)(1-x^2)}{2} = \dfrac{-x^3 - x^2 + x + 1}{2}$

b) $x = -1, 1/3$

c) $A(-1) = 0$, $A(1/3) = 16/27$, donc l'aire maximale est $16/27$.

Question 4

a) $x^3 - \dfrac{2}{3}x^{3/2} + C$

b) $\ln(\sqrt{2x+1}) + C$ ou $\dfrac{\ln(2x+1)}{2} + C$

c) $\ln(x) + \sqrt{2x} + C$

Question 5

a) $\dfrac{7}{6}$

b) 1

c) 2

Question 6

a) Faire le calcul de la dérivée de $\ln\left(x^2\right) - \frac{1}{x^2} + C$ donne $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$.

b) On trouve d'abord les zéros de la parabole pour déterminer l'intervale sur lequel il faut intégrer : $x = \pm 2$.

$$\begin{aligned} \text{Aire} &= \int_{-2}^{2} 3 - \frac{x^2}{2} \\ &= 3x - \frac{x^3}{6}\Big|_{-2}^{2} \\ &= 3(2) - \frac{(2)^3}{6} - (3(-2) - \frac{(-2)^3}{6}) \\ &= 6 - \frac{8}{6} + 6 - \frac{8}{6} = 12 - \frac{16}{6} \\ &= \frac{60 - 16}{6} = \frac{44}{6} = \frac{22}{3} \end{aligned}$$