Dérivée de fonctions transcendantes

Fonctions exponentielles et logarithmiques

Question 1
Évaluer et simplifier.

a) $\log_{10}(1000)$
b) $\log_{100}(10)$
c) $\log_2(8)$
d) $\log_3\left(\frac{1}{9}\right)$
e) $\log_3\left(\sqrt[4]{9}\right)$
f) $\log_2\left(\sqrt{2^5}\right)$
g) $\log_3(54)$
(ind. $\log_3(2) \approx 0,63$)
h) e^0
i) e^1
j) $\ln(1)$
k) $\ln\left(e^3\right)$
l) $\ln\left(\sqrt{e}\right)$
m) $\ln(e)$
n) $\log_2\left(\left(2^{11}\right)^9\right)$
o) $\log_2\left(\frac{5}{2}\right) - \log_2\left(\frac{10}{2}\right)$

Question 2
Résoudre les équations suivantes.

a) $\log_2(x) = 5$
b) $\log_3(x) = 4$
c) $\log_5(x) = \frac{1}{2}$
d) $\log_{10}(x) = 3$
e) $\ln(x) = 0$
f) $\ln(x) = 1$
g) $\ln(x) = 10$
h) $3^x = 100$
i) $5 \cdot 3^x = 2^{x+1}$
j) $2\log_4(x) - \log_4(x-1) = 1$

Question 3
Évaluer les limites suivantes.

a) $\lim_{x\to 0^+} \ln(x)$
b) $\lim_{x\to 1^+} \ln(x-1)$
c) $\lim_{x\to 1^-} \ln(x-1)$
d) $\lim_{x\to 1^+} \ln(x)$
e) $\lim_{x\to 2^+} \ln(x-1)$
f) $\lim_{x\to\infty} \ln(x+2)$
g) $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\ln(x)}$

Question 4
Évaluer les limites suivantes.

a) $\lim_{x\to 0} e^x$
b) $\lim_{x\to 2} e^x$
c) $\lim_{x\to 2} e^{x-1}$
d) $\lim_{x\to \frac{1}{2}} e^x$
e) $\lim_{x\to\infty} e^x$
f) $\lim_{x\to\infty} -e^x$
g) $\lim_{x\to\infty} e^{-x}$
h) $\lim_{x\to\infty} -e^{-x}$
i) $\lim_{x\to\infty} e^{x-1}$

Question 5
Évaluer les limites suivantes

a) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x$
b) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2^x}$
c) $\lim_{x\to\infty} 2^{-x}$
d) $\lim_{x\to-\infty} 2^x$
e) $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x$
f) $\lim_{x\to\infty} e^{1/x}$
g) $\lim_{x\to\infty} \log_{1/3}(x)$
h) $\lim_{x\to 2} \log_2\left(x^2 - 3x + 2\right)$
i) $\lim_{x\to 4^+} \frac{5}{\log_3(x-4)}$
j) $\lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt{x} + \ln(-x)\right)$

Question 6
Évaluer les limites suivantes.

a) $\lim_{x\to 2^+} \log(x-2)$
b) $\lim_{x\to 2^-} \log(x-2)$
c) $\lim_{x\to 2} \log(x-2)$
d) $\lim_{x\to 1} \ln\left(x^2 - 2x + 1\right)$
e) $\lim_{x\to 3} \ln\left(x^2 - 6x + 9\right)$

Question 7
Trouver les asymptotes des fonctions suivantes.

a) $y = \log\left(x^2 - 1\right)$
b) $y = \ln\left(\frac{x-2}{x-3}\right)$
c) $f(x) = \begin{cases} e^x + 4 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^3 - 1}{x+2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Question 8
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $f(x) = e^{2x}$
b) $f(x) = 3^{2x}$
c) $y = \frac{e^{2x}}{4}$
d) $y = e^{x^2+3x+4}$
e) $f(x) = \ln\left(x^2\right)$
f) $f(x) = \log_2\left(x^2\right)$
g) $y = \ln\left(x^2 + 3x + 4\right)$
h) $y = 3^x + 3^{-x} + x^3 + 3x$
i) $y = 8^{2^x + x^2}$
j) $y = \frac{x^3}{e^x}$
k) $y = x \cdot 8^x$

Question 9
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $y = \log_5\left(x^3 + 1\right)$
b) $y = \frac{\ln(x)}{x}$
c) $y = x^4\left(\ln(x)\right)^5$
d) $y = \sqrt{\log_3(x)}$

Question 10
Trouver $\dfrac{dy}{dx}$ pour chacune des relations suivantes.

a) $e^{x+y} = y^2+1$

b) $x\ln(y) - 3xy^2 = 0$

Question 11
Soit la fonction $f(x) = e^{-x^2}$.

a) Faire l'étude complète de croissance, concavité et asymptotes de cette fonction puis tracer son graphique.

b) Trouver les dimensions du rectangle d'aire maximale que l'on peut inscrire entre l'axe des x et la courbe de f.

Question 12
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $y = e^{\sqrt{x}} + \sqrt{e^x}$

b) $y = e^{\frac{x^2}{x-5}}$

c) $y = 2^{3^{5^x}}$

d) $y = \ln(x)\log(x)$

e) $y = \dfrac{\ln x^4}{x^4}$

f) $y = \left(x + \ln^2(x)\right)^5$

Fonctions trigonométriques

Question 13
Évaluer et simplifier les expressions suivantes.

a) $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

b) $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

c) $\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

d) $\sec\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

e) $\operatorname{cosec}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

f) $\operatorname{cotan}\left(\frac{-2\pi}{3}\right)$

Question 14
Évaluer les expressions suivantes.

a) $\sin\left(\frac{8\pi}{3}\right)$

b) $\cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right)$

c) $\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

d) $\cot\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$

e) $\sec\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

f) $\csc\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

g) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$

h) $\cos\frac{\pi}{12}$

Question 15
Démontrer les identités trigonométriques suivantes

a) $\sin(-x) = -\sin(x)$

b) $\cos(-x) = \cos(x)$

c) $\sin(x) = -\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

d) $\cos(x) = \sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$

e) $\sin^2(\theta) = \dfrac{1-\cos(2\theta)}{2}$

f) $\sin(3\theta) = 3\sin(\theta) - 4\sin^3(\theta)$

g) $\sin^4(\theta) - \cos^4(\theta) = \cos(2\theta)$

h) $\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right) + \dfrac{\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)}$

Question 16
Démontrer les formules de dérivation suivantes :

a) $\left(\cot(x)\right)' = -\csc^2(x)$

b) $\left(\sec(x)\right)' = \sec(x)\tan(x)$

c) $\left(\csc(x)\right)' = -\csc(x)\cot(x)$

Question 17
Démontrer que $(\cos(x))' = -\sin(x)$

a) En utilisant la définition de la dérivée.

b) En utilisant l'identité $\cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)}$.

c) En utilisant les identités $\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ et $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

Question 18
Démontrer les formules de dérivation suivantes à l'aide des formules de dérivation des fonctions $\sin(x)$ et $\cos(x)$ et des propriétés de la dérivée.

a) $\left(\cot(x)\right)' = -\csc^2(x)$

b) $\left(\csc(x)\right)' = -\csc(x)\cot(x)$

Question 19
Évaluer les limites suivantes

a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \sin\left(\frac{x}{2}\right)$

b) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/3} \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sin\left(\frac{3x}{2}\right)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to\pi^+} \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

e) $\displaystyle\lim_{x\to-\pi^-} \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

f) $\displaystyle\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} \frac{1}{\cos(x)}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\tan(x)}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to\pi^-} \frac{1}{\tan(x)}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \sec(x)$

j) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sec(x)$

Question 20
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $y = x^3\sin(x)$

b) $y = \cos(3x) - 3\cos(x)$

c) $y = \sec^2(x)$

d) $y = \cot(3x)\csc(3x)$

e) $y = \tan\left(\dfrac{x^2}{x+1}\right)$

f) $y = e^{\sin(3x)}$

Question 21
Trouver $\dfrac{dy}{dx}$ à l'aide de la dérivation implicite.

a) $x\sin(x) + y\cos(y) = 0$

b) $\sin^4(xy) + xy = 0$

c) $\sec\left(y^3\right) + y^2 = 3x^4$

d) $x\tan\left(e^y\right) + \ln y = 3$

Question 22
Étudier la croissance et la concavité des fonctions suivantes et tracer leur graphique.

a) $f(x) = \dfrac{x}{2} + \sin(x)$, où $x \in [0,\ 2\pi]$

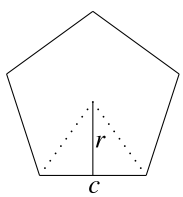
b) $f(x) = \sin x + \cos(x)$, où $x \in [0,\ 2\pi]$

Question 23
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $y = \cos\left(e^{-x}\right)$
b) $y = \sin^3(x) + 3^{\sin(x)}$
c) $y = \ln\left(\sec(x) + \tan(x)\right)$
d) $y = \dfrac{1+\csc(x^2)}{1-\cot(x^2)}$
e) $y = \cos\left(\tan(x^2)\right)$
f) $y = e^{x^3}\sec^2(2x)$
g) $y = e^{\tan(x)} - \sin(x)\cos(x)$
h) $y = \cot\left(\dfrac{x-1}{x-4}\right)$

Question 24
Déterminer quel est le rectangle de périmètre maximum pouvant être inscrit dans le cercle unité.

Question 25
Un polygone régulier à n côtés est une figure formée de n côtés et angles congrus (carré, pentagone régulier, hexagone régulier, etc.). Plus le nombre de côtés augmente, plus le polygone ressemble à un cercle. On peut dire qu'un cercle est la limite d'un polygone régulier lorsque le nombre n de côtés tend vers l'infini. Le rayon de ce cercle correspondra alors à l'apothème r illustrée dans la figure.



a) Trouver l'aire d'un polygone régulier à n côtés en fonction de r et de c.
b) Exprimer c en fonction de n (vous aurez besoin de trigonométrie ici).
c) Utiliser les deux résultats pour trouver une formule générale pour l'aire d'un polygone à n côtés en fonction uniquement de n et de r.
d) En déduire la formule de l'aire d'un cercle (Remarquons que r est une constante dans le processus). *Vous venez de démontrer la formule de l'aire du cercle ! Cette formule a été démontrée pour la première fois par Archimède (287 av. J.C. – 212 av. J.C.), mais sans utiliser le concept moderne de limite.*

Fonctions trigonométriques inverses

Question 26
Évaluer et simplifier.

a) $\sin(\arcsin(1/2))$
b) $\arccos(\cos(\pi/7))$
c) $\arcsin(\sin(7\pi/5))$
d) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
e) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$
f) $\arctan(-1)$
g) $\arctan\left(\sqrt{3}\right)$

Question 27
Évaluer les nombres suivants en radians ; donner des valeurs exactes.

a) $\arcsin\left(\dfrac{1}{2}\right)$
b) $\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)$
c) $\arctan(-1)$
d) $\operatorname{asec}(2)$
e) $\operatorname{arcctg}\left(\sqrt{3}\right)$
f) $\arcsin((\sin(5)))$
g) $\tan((\arctan(3)))$
h) $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan(x)$

Question 28
Résoudre les équation suivantes.

a) $\sin(x) + 1 = \cos(x)$
b) $2\sin\left(x^2-1\right) = \sqrt{2}$

Question 29
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $y = \arcsin\left(x^3 - 3x\right)$
b) $y = (x - \arctan(2x))^5$
c) $y = \operatorname{arccosec}\left(x^2\right)$
d) $y = x \arccos 2x$
e) $y = \arcsin\left(\sqrt{x}\right)$
f) $y = \dfrac{2}{\operatorname{arcctg}(x)}$

Question 30
Trouver $\dfrac{dy}{dx}$ pour chacune des relations suivantes.

a) $\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) = y^2$
b) $\arccos(y) = \arcsin(x)$
c) $e^{\arctan(y)} = \sin\left(\ln(x)\right)$

Question 31
Trouver les valeurs de x pour lesquelles la fonction $f(x) = \arcsin(3x)$ admet une droite tangente perpendiculaire à la droite $y = 3 - x/5$.

Question 32
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $y = x\arctan(x)$
b) $y = \arccos\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$
c) $y = \operatorname{arcctg}\left(e^{3\sec(x)}\right)$
d) $y = \operatorname{asec}\left(x^2+1\right)$
e) $y = \dfrac{\arcsin(x^2)}{\ln(x)}$

Applications

Question 33
Soit la fonction $f(x) = x + \ln\left(x^2+1\right)$

a) Montrer que f est toujours croissante
b) Étudier la concavité de f et donner les points d'inflexion.

Question 34
Trouver les extremums absolus des fonctions données sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

a) $f(x) = \cos^2(2x)$
b) $f(x) = 5\sin(x) + 12\cos(x)$

Question 35
Un virus se propage de telle sorte que le nombre de personnes atteintes du virus t semaines après son apparition est donné par

$$N(t) = \frac{5000}{2 + 8e^{-\frac{3t}{4}}}.$$

a) Initialement, combien de personnes sont porteuses du virus
b) Combien de personnes seront atteintes 4 semaines après son apparition ?
c) Dans combien comptera-t-on 1300 victimes ?
d) À long terme, combien de personnes contracteront ce virus ?
e) Quel est le taux de propagation du virus après 2 semaines ?
f) Quel est ce taux à long terme ?
g) À quel moment le virus se propage-t-il le plus rapidement ?

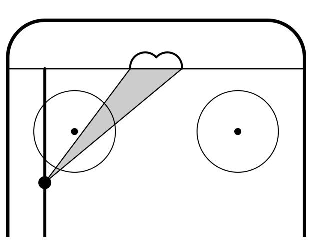
Question 36
On lance un projectile avec un canon selon une vitesse initiale de v_0 m/s. Si on néglige la résistance de l'air, la portée (la distance horizontale parcourue par le projectile) est donnée par la fonction

$$R(\theta) = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$$

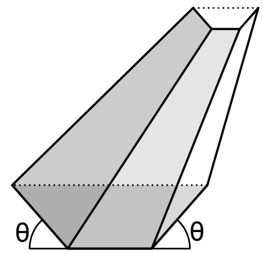
où $g = 9,8$ m/s^2 et θ est l'angle d'inclinaison du canon. Selon quel angle doit-on placer le canon pour avoir une portée maximale ?

Question 37
Les côtés congrus d'un triangle isocèle mesurent 5 cm. Trouver l'angle θ entre ces deux côtés qui maximise l'aire du triangle.

Question 38
À quelle distance de la ligne des buts un ailier gauche de hockey sur table doit-il lancer pour maximiser ses chances de marquer si le but mesure 5 cm de largeur et que le joueur est restreint à un rail situé à 8 cm du poteau le plus près ? On suppose que le joueur maximise ses chances de marquer si l'angle d'ouverture vers le but est maximal.

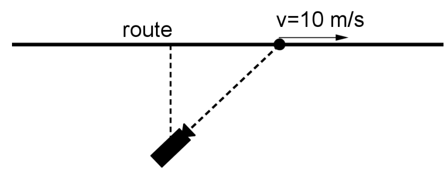


Question 39
On fabrique une auge à partir d'une feuille de métal de 120 cm de largeur. De chaque côté, on replie une bande de 40 cm selon un angle θ. Quel doit être cet angle pour que l'auge puisse contenir un volume maximal ?



Question 40
Trouver l'équation de la droite tangente à la courbe de $f(x) = \ln(\sin(x))$ au point $\left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Question 41
Un caméraman est posté à 5 m d'une route rectiligne et doit filmer une voiture qui passera sur cette route à vitesse constante de 10 m/s. À quelle vitesse angulaire (en rad/s) la caméra doit-elle pivoter exactement une seconde après que la voiture soit passée devant elle ?



Question 42
Une étude menée auprès d'athlètes olympiques révèle que la capacité pulmonaire de ces derniers obéit à la fonction

$$C(x) = \frac{0,8\ln(x) - 1,8}{0,009x},$$

où x est l'âge de l'athlète. À quel âge un athlète a-t-il une capacité pulmonaire maximale ?

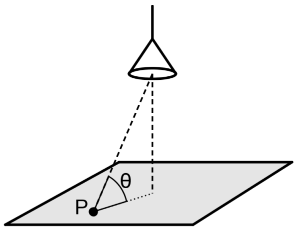
Question 43
À l'aide du test de la dérivée seconde, trouver les extremums locaux de

$$f(x) = \arctan(x) + \frac{x^2}{2} - x.$$

Question 44
Soit $f(x) = \sqrt{x-4}$ et la droite D joignant l'origine et un point quelconque sur la courbe de f. Quelle valeur de x minimise l'angle entre la droite D et l'axe des x

Question 45
On forme un cône en supprimant un secteur d'un disque de rayon égal r. Trouver la valeur de l'angle θ pour lequel le volume du cône obtenu est maximal.

Question 46
On doit suspendre une lampe au dessus du centre d'une table carrée de 2 m par 2 m. L'intensité de la lumière à un point P de la table est directement proportionnel au sinus de l'angle que forme le rayon lumineux avec la table, et inversement proportionnel à la distance entre P et la lampe. À quelle hauteur la lampe doit-elle être suspendue pour que l'intensité lumineuse soit maximale aux quatre coins de la table ?

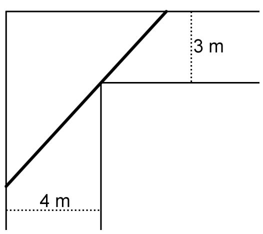


Question 47
Trouver les extremums locaux des fonctions suivantes.

a) $y = \ln^2\left(2x^2 - x\right)$.

b) $y = \sin^2 x + 2\cos x$.

Question 48
Quelle est la longueur maximale du tuyau de diamètre négligeable qui peut tourner le coin de ce corridor si on néglige la hauteur du corridor ?



Exercices récapitulatifs

Question 49
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $y = \log_3\left(\sqrt{x}\right)$

b) $y = \sqrt{\ln\left(\sqrt{x}\right)}$

c) $y = 4 \cdot \sqrt{\dfrac{1}{3^x}}$

d) $y = (e^x + 2^x)^5$

e) $y = \dfrac{e^x}{e^x - x}$

f) $y = \tan^2\left(e^{x^3}\right)$

g) $y = \log\left(\cos(3x) - \cos^3(2x)\right)$

h) $y = \sin(2^x + \cos(x))$

i) $y = \ln\left(\csc\left(3x^4 - 2e^x\right)\right)$

j) $y = \cot\sqrt{x} + \sqrt{\sec x^2}$

k) $y = \dfrac{x^2}{\tan\left(\sqrt[3]{x}\right)}$

l) $y = \sqrt{\sec(\sin(x^2))}$

m) $y = \ln(\arctan(e^x))$

n) $y = \operatorname{arcctg}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

o) $y = \arcsin\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$

Solutions

Question 1

a) 3 f) 5/2 k) 3

b) 1/2 g) 3,63 l) 1/2

c) 3 h) 1 m) 1

d) -2 i) e n) 99

e) 1/2 j) 0 o) -1

Question 2

a) $x = 32$

b) $x = 81$

c) $x = \sqrt{5}$

d) $x = 1000$

e) $x = 1$

f) $x = \mathrm{e}$

g) $x = \mathrm{e}^{10}$

h) $x = \ln_3(100)$

i) $x = \dfrac{\ln(2/5)}{\ln(3/2)}$

j) $x = 2$

Question 3

a) $-\infty$ d) 0 g) ∞

b) $-\infty$ e) 0

c) $\nexists$ f) ∞

Question 4

a) 1 d) $\sqrt{\mathrm{e}}$ g) 0^+

b) e^2 e) ∞ h) 0^-

c) e f) $-\infty$ i) ∞

Question 5

a) 0 d) 0 g) $-\infty$ j) $\nexists$

b) 0 e) ∞ h) $\nexists$

c) 0 f) 1 i) 0

Question 6

a) $-\infty$

b) $\nexists$

c) $\nexists$

d) $-\infty$ car $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$

e) $-\infty$

Question 7

a) Pas d'A.H. ; A.V. en $x = 0$.

b) A.H. en $y = 0$; A.V. en $x = 2$ et en $x = 3$.

c) A.H. en $y = 4$; pas d'A.V.

Question 8

a) $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x}$

b) $f'(x) = 2 \cdot 3^{2x} \ln(3)$

c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}$

d) $y' = (2x+3)\mathrm{e}^{x^2+3x+4}$

e) $f'(x) = \dfrac{2}{x}$

f) $f'(x) = \dfrac{2}{x\ln(2)}$

g) $f'(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+3x+4}$

h) $\dfrac{dy}{dx} = 3^x \ln(3) - 3^{-x}\ln(3) + 3x^2 + 3$

i) $\dfrac{dy}{dx} = 8^{2^x+x^2}\left(2^x \ln(2) + 2x\right)\ln(8)$

j) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2(3-x)}{\mathrm{e}^x}$

k) $\dfrac{dy}{dx} = 8^x(1 + x\ln(8))$

Question 9

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2}{(x^3+1)\ln(5)}$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$

c) $\dfrac{dy}{dx} = x^3(\ln(x))^4(4\ln(x)+5)$

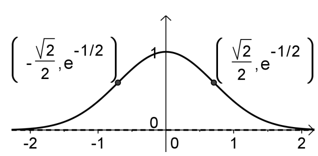
d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2x\ln(3)\sqrt{\log_3(x)}}$

Question 10

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\mathrm{e}^{x+y}}{2y - \mathrm{e}^{x+y}}$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y\ln(y) - 3y^3}{6xy^2 - x}$

Question 11

a) 

b) Base de $\sqrt{2}$, hauteur de $\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

Question 12

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{\mathrm{e}^x}}{2}$

b) $\dfrac{dy}{dx} = e^{\frac{x^2}{x-5}} \dfrac{x^2 - 10x}{(x-5)^2}$

c) $\dfrac{dy}{dx} = 2^{3^{5^x}} 3^{5^x} 5^x \ln(2)\ln(3)\ln(5)$

d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2\log(x)}{x}$

e) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4 - 16\ln(x)}{x^5}$

f) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{5\left(x + \ln^2(x)\right)^4 (x + 2\ln(x))}{x}$

Question 13

a) 1 c) 1 e) $\sqrt{2}$

b) $-\sqrt{3}/2$ d) 2 f) $1/\sqrt{3}$

Question 14

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) 0

c) -1

d) $\sqrt{3}$

e) $-\sqrt{2}$

f) -2

g) $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ ou utiliser le fait que $\pi/3 + \pi/4 = 7\pi/12$

h) $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

Question 15

a) Voir formulaire trigo.

b) Voir formulaire trigo.

c) Voir formulaire trigo.

d) Utilisez l'identité donnant le cosinus d'une somme de deux angles.

e) Utilisez l'identité donnant le sinus d'une somme de deux angles à deux reprises.

f) Laissé à l'étudiant·e.

g) Laissé à l'étudiant·e.

Question 16

a)

$$\begin{aligned}\left(\cot(x)\right)' &= \left(\left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)'\right. \\ &= \frac{(-\sin(x)\sin(x) - \cos(x)\cos(x))}{\sin^2(x)} \\ &= \frac{-1}{\sin^2(x)} \\ &= -\csc^2(x)\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\left(\sec(x)\right)' &= \left((\cos(x))^{-1}\right)' \\ &= -\left(\cos(x)\right)^{-2}(-\sin(x)) \\ &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\frac{1}{\cos(x)} \\ &= \sec(x)\tan(x)\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\left(\csc(x)\right)' &= \left((\sin(x))^{-1}\right)' \\ &= -\left(\sin(x)\right)^{-2}(\cos(x)) \\ &= -\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\frac{1}{\sin(x)} \\ &= -\csc(x)\cot(x)\end{aligned}$$

Question 17

a) S'inspirer de la preuve de $(\sin(x))' = \cos(x)$; vous pouvez utiliser les deux lemmes démontrés en classe sans les redémontrer.

b) Dériver directement.

c) Fait en classe, tentez de le refaire par vous même.

Question 18

a) S'inspirer des preuves vues en classe.

b) Revoir les preuves faites en classe.

Question 19

a) 1 d) $+\infty$ h) $-\infty$

b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ f) $+\infty$ i) -1

c) $\nexists$-∞ g) $+\infty$ j) ∞

Question 20

a) $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2\sin(x) + x^3\cos(x)$

b) $\dfrac{dy}{dx} = 3\sin(x) - 3\sin(3x)$

c) $\dfrac{dy}{dx} = 2\sec^2(x)\tan(x)$

d) $\dfrac{dy}{dx} = 3\csc(3x)\left(1 - 2\csc^2(3x)\right)$

e) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\left(x^2+2x\right)\sec^2\left(\frac{x^2}{x+1}\right)}{(x+1)^2}$

f) $\dfrac{dy}{dx} = 3\mathrm{e}^{\sin(3x)}\cos(3x)$

Question 21

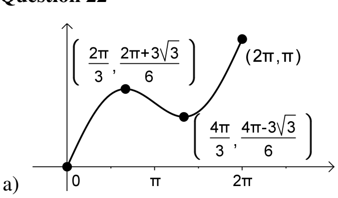
a) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\sin(x) + x\cos(x)}{\cos(y) - y\sin(y)}$

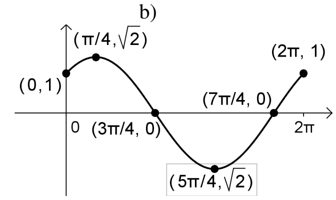
b) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$

c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{12x^3}{3y^2\sec\left(y^3\right)\tan\left(y^3\right) + 2y}$

d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-y\tan\left(e^y\right)}{xye^y\sec^2\left(e^y\right) + 1}$

Question 22

a) 

b) 

Question 23

a) $\frac{dy}{dx} = \mathrm{e}^{-x}\sin \mathrm{e}^{-x}$

b) $\frac{dy}{dx} = \cos x\left(3 sin^2(x) + 3^{\sin(x)}\ln(3)\right)$

c) $\frac{dy}{dx} = \sec(x)$

d) $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x\csc(x^2)\left(1+\cot(x^2)+\csc(x^2)\right)}{(1-\cot(x^2))^2}$

e) $\frac{dy}{dx} = -2x\sec^2(x^2)\sin\left(\tan(x^2)\right)$

f) $\frac{dy}{dx} = e^{x^3}\sec^2(2x)\left(3x^2+4\tan(2x)\right)$

g) $\frac{dy}{dx} = e^{\tan(x)}\sec^2(x) - \cos(2x)$

h) $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{x-4}\csc^2\left(\frac{x-1}{x-4}\right)$

Question 24

Si on pose que x est la base d'un rectangle inscrit dans le cercle unité et y sa hauteur, le périmètre du rectangle est $p = 2x + 2y$.

La diagonale du rectangle étant le double du rayon unité, celle-ci est de longueur 2. De plus, si θ est l'angle formé par la diagonale du rectangle et sa base, alors $x = 2\cos(\theta)$ et $x = 2\sin(\theta)$.

On peut donc exprimer le périmètre p en fonction de l'angle θ :

$$p(\theta) = 4\cos(\theta) + 4\sin(\theta).$$

L'angle θ doit être compris entre 0 et $\pi/2$.

En dérivant, on trouve que

$$p'(\theta) = 4(-\sin(\theta) + \cos(\theta))$$

p'$(\theta) = 0$ si

$$-\sin(\theta) + \cos(\theta) = 0$$

donc si

$$\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \tan(\theta) = 1,$$

ce qui est le cas quand $\theta = \pi/4$ ou $\theta = 3\pi/4$. On rejette cette seconde solution car elle n'est pas entre 0 et $\pi/4$.

On vérifie avec la dérivée seconde laquelle de cette solution donne un maximum de $p(\theta)$.

$$p'(\theta) = 4(-\cos(\theta) + -\sin(\theta)) \quad p'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0$$

Comme la dérivée seconde $p'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ est négative, le périmètre est maximum en $\pi/4$.

Question 25

a) $A = \frac{ncr}{2}$

b) $c = 2r\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$

c) Laissé à l'étudiant.

d) Laissé à l'étudiant. Indice : il faut adapter le résultat $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$ à la situation.

Question 26

a) $1/2$ d) $-\pi/4$ g) $\pi/3$

b) $\pi/7$ e) $2\pi/3$

c) $-2\pi/5$ f) $-\pi/4$

Question 27

a) $\frac{\pi}{6}$ e) $\frac{\pi}{6}$

b) $\frac{2\pi}{3}$ f) 5

c) $-\frac{\pi}{4}$ g) 3

d) $\frac{\pi}{3}$ h) $\frac{\pi}{2}$

Question 28

a) Mettre au carré chaque membre de l'égalité. $x = -\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

b) $x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{4} + +1 + 2\pi k}, k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \pm\sqrt{\frac{3\pi}{4} + 1 + 2\pi k}, k \in \mathbb{Z}$

Question 29

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2-3}{\sqrt{1-(x^3-3x)^2}}$

b) $\frac{dy}{dx} = 5(x - \arctan(2x))^4\,\frac{4x^2-1}{4x^2+1}$

c) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x\sqrt{x^4-1}}$

d) $\frac{dy}{dx} = \arccos(2x) - \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}$

e) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$

f) $\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{(x^2+1)\,\mathrm{arcctg}^2(x)}$

Question 30

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{2x^2+2y^3-x}$

b) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$

c) $\frac{dy}{dx} = \frac{\left(1+y^2\right)\cos(\ln(x))}{x\mathrm{e}^{\arctan(y)}}$

Question 31

$x = -4/15$ et $x = 4/15$

Question 32

a) $\frac{dy}{dx} = \arctan(x) + \frac{1}{1+x^2}$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2+2}{\sqrt{x^4-6x^2+1}}$

c) $\frac{dy}{dx} = -\frac{3\mathrm{e}^{3\sec(x)}\sec(x)\tan(x)}{1+\mathrm{e}^{6\sec(x)}}$

d) $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$

e) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{\ln(x)\sqrt{1-x^4}} - \frac{\arcsin(x)}{x\ln^2(x)}$

Question 33

a) Laissé à l'étudiant. Montrer que la dérivée est toujours ≥ 0

b) Concave vers le haut sur $[-1, 1]$, concave vers le bas sur $]-\infty, -1]$ et $[1, \infty[$, points d'inflexion en $x = -1$ et $x = 1$.

Question 34

a) max=1, atteint en $x \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$, min=0, atteint en $x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

Question 35

a) 500 personnes

b) Environ 2085 personnes

c) 1,96 semaines

d) $\lim_{t\to\infty} N(t) = 2500$ personnes

e) $N'(2) = 467,24$ personnes/semaine

f) $\lim_{t\to\infty} N'(t) = 0$ personnes (il faut mettre en évidence les termes dominants)

g) Il faut trouver le maximum de $N'(t)$. Comme $N''(t') < 0$ pour tout $x > 0$, $N'(t)$ est maximale lorsque $t = 0$.

Question 36

$\theta = \frac{\pi}{4}$

Question 37

$\theta = \frac{\pi}{2}$

Question 38

À $2\sqrt{26}$ cm.

Question 39

$\theta = \frac{\pi}{3}$ rad

Question 40

$y = x + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4}$

Question 41

$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{2}{5}$ rad/s

Question 42

$\mathrm{e}^{13/4} \approx 25,79$ ans

Question 43

min. local en $(0, 0)$

Question 44

$x = 8$

Question 45

$\theta = \sqrt{2}\pi$ rad $\approx 254,56°$

Question 46

$h = \sqrt{2}$m

Question 47

a) Aucun max. local, min. local en $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ et en $(1, 0)$.

b) max. local en $(2k\pi, 2)$, min. local en $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -2\right)$.

Question 48

Environ 9,87 m

Question 49

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x\ln(3)}$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4x\sqrt{\ln\left(\sqrt{x}\right)}}$

c) $\frac{dy}{dx} = -2\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^x}\ln(3)$

d) $\frac{dy}{dx} = 5(e^x + 2^x)^4(e^x + 2^x\ln(2))$

e) $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}$

f) $\frac{dy}{dx} = 6x^2e^{x^3}\tan\left(e^{x^3}\right)\sec^2\left(e^{x^3}\right)$

g) $\frac{dy}{dx} = \frac{-3\sin(3x)+6\cos^2(2x)\sin(2x)}{\ln(10)\left((\cos(3x-\cos^3(2x))\right)}$

h) $\frac{dy}{dx} = (2^x\ln(2) - \sin(x))\cos(2^x + \cos(x))$

i) $\frac{dy}{dx} = \left(12x^3 - 2e^x\right)\cot\left(3x^4 2e^x - 3x^4\right)$

j) $\frac{dy}{dx} = x\tan\sqrt{\sec(x^2)} - \frac{\csc^2\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}$

k) $\frac{dy}{dx} = 2x\cot\left(\sqrt[3]{x}\right) - \frac{\sqrt[3]{x^4}}{3}\csc\left(\sqrt[3]{x}\right)$

l) $\frac{dy}{dx} = \cos\left(x^2\right)\tan\left(\sin x^2\right)\sqrt{\sec(\sin x^2)}$

m) $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{(1+e^{2x})\arctan(e^x)}$

n) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$

o) $\frac{dy}{dx} = \frac{1-\ln x}{x^2+\ln^2 x}$