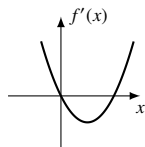


Examen formatif 3

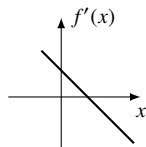
Question 1

Répondre aux questions suivantes en choisissant un des graphiques (1) à (16). Aucune justification n'est demandée.

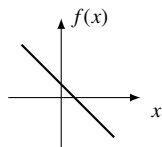
- a) Si $f'(x)$ a le graphe suivant, quel est le graphe de $f(x)$?



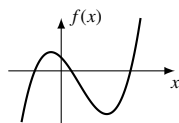
- b) Si $f'(x)$ a le graphe suivant, quel est le graphe de $f(x)$?



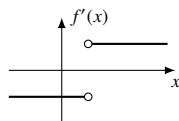
- c) Si $f(x)$ a le graphe suivant, quel est le graphe de $f'(x)$?



- d) Si $f(x)$ a le graphe suivant, quel est le graphe de $f'(x)$?



- e) Si $f'(x)$ a le graphe suivant, quel est le graphe de $f(x)$?



- f) Quelle fonction correspond au tableau de signe suivant?

x	$-\infty$	1	∞
$f'(x)$	$+$	\neq	$+$
$f''(x)$	$+$	\neq	$-$
$f(x)$	$-\infty$	1	∞

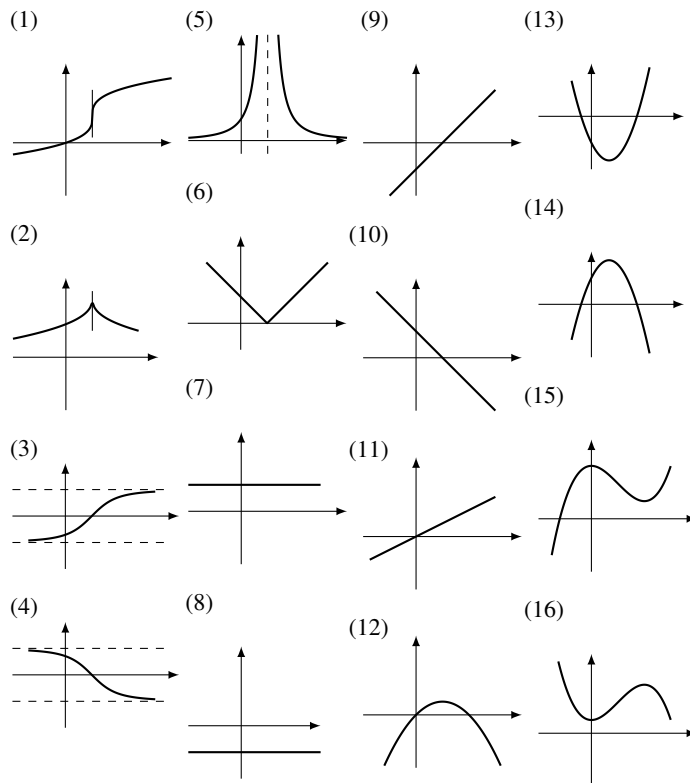
- g) Quel est le graphe de $f'(x)$ si $f(x)$ a une tangente verticale?

- h) Quel est le graphe de la fonction où $f'(x) = -1$ pour tout x ?

- i) Quel est le graphe de la fonction telle que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$?

- j) Quel est le graphe de la fonction telle que $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = -1$ et $f'(0) = -1$?

- k) Quel est le graphe de la fonction telle que $f'(0) = 0$ et $f''(0) > 0$?



Question 2

Esquissez la fonction dont le tableau de variation est le suivant.

x	$-\infty$	-3	-1	1	2	3	4	5	∞
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	\neq	$+$	0	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	\neq	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	2		-4		3		0		2

Question 3

Évaluer les limites suivantes.

- a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x - 4}$
- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - 1)^2 - (x - 1)$

Question 4

Vrai ou faux ?

- a) Si $f'(a) = 0$ alors f a un maximum ou un minimum en $x = a$.
- b) Si $f(x)$ est une fonction polynômiale de degré 5, f peut avoir au plus 4 minimums ou maximums.
- c) Si $f''(x) > 0$ sur $[-2, \sqrt{5}]$, alors f est croissante sur $[-2, \sqrt{5}]$
- d) Une fonction peut être à la fois concave vers le haut et décroissante.
- e) Si $f'(a) > 0$, alors $f''(a) > 0$.

Question 5

Expliquer, *sans utiliser la notion de dérivée*, pourquoi la fonction $f(x) = x^2$ n'est pas croissante sur $[-1, 1]$.

Question 6

Déterminer le domaine, les valeurs critiques de la dérivée première, les minimums et les maximums et faire une esquisse de la fonction définie par

$$f(x) = x\sqrt{2-x^2}.$$

Question 7

Faire l'analyse de la concavité de la fonction

$$f(x) = 2x + \sqrt[3]{(1-x)^5}.$$

Déterminer les valeurs critiques de f'' , les points d'inflexions et faire une esquisse de la fonction basée sur ces données.

Question 8

Faire l'analyse complète des deux fonctions suivantes. Étudier la croissance, la concavité, les maximums, minimums, les points d'inflexion, et les asymptotes. Faire l'esquisse de la fonction.

$$\text{a) } f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - 2x + 3 \quad \text{b) } f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x - 2)^2}$$

Question 9

Trouver le point de la droite $y = x$ qui est le plus près du point $(2, 1)$.

Question 10

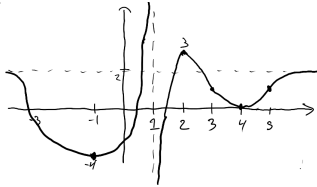
On crée une piste de course de 400 m dont l'intérieur consiste en un rectangle ayant un demi-cercle à chacun de ses bouts. Si on veut maximiser la superficie du rectangle à l'intérieur de la piste, quelles doivent être ses dimensions ?

Solutions

Question 1

- a) 15 e) 6 i) 4
 b) 14 f) 1 j) 10
 c) 8 g) 5 k) 16
 d) 13 h) 10

Question 2



Question 3

- a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2+4}{x^2-4} = \frac{8}{0^-} = -\infty$
 b) C'est une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x-4} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{4}{x^2})}}{x(1-\frac{4}{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2} \sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x(1-\frac{4}{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2} x \sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{(1-\frac{4}{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{(1-\frac{4}{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{(1-\frac{4}{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{(1-\frac{4}{x})} \\ &= -\frac{\sqrt{1+\frac{4}{(-\infty)^2}}}{(1-\frac{4}{-\infty})} \\ &= -\frac{1}{(1)} \\ &= -1 \end{aligned}$$

- c) (Forme $\infty - \infty$) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x-1)^2 - (x-1) =$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} (x-1)((x-1)-1) = \infty \cdot \infty = \infty$ (autre
 possibilité : commencer par développer
 $(x-1)^2$)

Question 4

- a) Faux
 b) Vrai
 c) Faux (elle est concave vers le haut)
 d) Vrai (par exemple x^2 est concave vers le haut et décroissante pour $x < 0$)
 e) Faux

Question 5

Comme $f(-1) = 1 > 0 = f(0)$, la fonction ne peut pas être croissante sur $[-1, 1]$.

Question 6

Le domaine de la fonction est $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

Après simplification, la dérivée de la fonction est

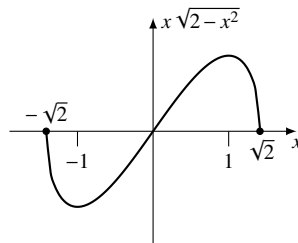
$$f'(x) = -\frac{2(x+1)(x-1)}{\sqrt{2-x^2}}$$

Ses valeurs critiques sont

- $f'(x) = 0$ en $x = -1$ et $x = 1$
- $f'(x) \nexists$ (et bouts !) en $x = -\sqrt{2}, \sqrt{2}$.

Tableau de variation :

x	$-\sqrt{2}$	-1	1	$\sqrt{2}$			
$f'(x)$	\nexists	$-$	0	$+$	0	$-$	\nexists



Question 7

$$f'(x) = 2 - \frac{5}{3} \sqrt[3]{1-x^2}$$

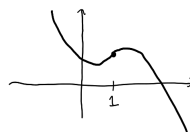
$$f''(x) = \frac{10}{9 \sqrt[3]{1-x}}$$

La seule valeur critique de f'' est $x = 1$, où $f''(x) \nexists$. Le tableau des signes de f'' :

x	1
$f''(x)$	$+$ \exists $-$

La fonction est donc concave vers le haut sur $]-\infty, 1[$, concave vers le bas sur $]1, \infty[$, et elle a un point d'inflexion en $x = 1$.

Une esquisse possible :



Question 8

- a) Comme f est une fonction polynomiale, elle est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

A.H.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - 2x + 3 = \infty$$

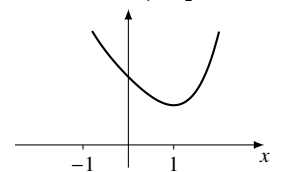
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - 2x + 3 = \infty$$

A.V. : Il n'y a pas de division par zéro, donc pas d'asymptotes verticales.

$f'(x) = (x^2 + x + 2)(x - 1)$; le seul point critique de f' est $x = 1$.

$f''(x) = 3x^2 + 1$; f'' n'a aucun point critique.

x	$-\infty$	1	∞
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	∞	\searrow Min \nearrow	∞



- b) Domaine de f : $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$$f'(x) = -\frac{4(x-\frac{1}{2})}{(x-2)^3}$$

Points critiques : $f'(x) = 0$ si $x = 1/2$,
 $f'(x) \nexists$ si $x = 2$.

$$f''(x) = \frac{8(x+\frac{1}{4})}{(x-2)^4}$$

Points critiques : $f''(x) = 0$ si $x = -1/4$;
 $f''(x) \nexists$ si $x = 2$.

A.H.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-1}{(x-2)^2} = 1$$

La droite $y = 1$ est une A.H.

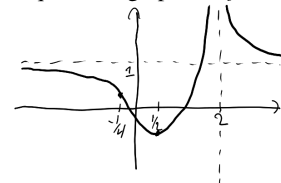
A.V.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-1}{(x-2)^2} = \infty$$

(les limites $x \rightarrow 2^+$ et $x \rightarrow 2^-$ donnent le même résultat.)

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	2	∞
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$ \nexists $-$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$ \nexists $+$	
$f(x)$	1	\searrow INF	\searrow MIN	\nearrow ∞	\searrow 1

Esquisse du graphe de f :



Question 9

Soit (x, y) un point sur la droite donnée. La distance entre $(2, 1)$ et (x, y) est

$$d = \sqrt{(2-x)^2 + (1-y)^2}.$$

Comme $y = x$, on trouve que

$$d(x) = \sqrt{(2-x)^2 + (1-x)^2} = \sqrt{2x^2 - 6x + 5}.$$

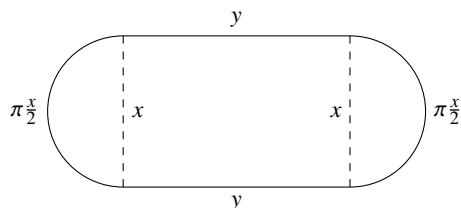
On minimise $d(x)$.

$$d'(x) = \frac{2(x-3)}{2\sqrt{2x^2 - 6x + 5}}.$$

La dérivée est nulle en $x = 3$. On vérifie avec un tableau de signes qu'on a bien un minimum en $x = 3$.

Question 10

Appelons x la largeur du rectangle central et y sa longueur; x est aussi le diamètre des demi-cercles à chacun des bouts de la piste.



Le périmètre total est

$$\pi x + 2y = 400$$

et la superficie du rectangle est $A = xy$.

On trouve donc que $y = \frac{400 - \pi x}{2}$ et que

$$A = x \frac{400 - \pi x}{2} = 200x - \frac{\pi}{2}x^2$$

On veut maximiser A . En dérivant, on trouve

$$A' = 200 - \pi x.$$

On a que $A' = 0$ si et seulement si $x = \frac{200}{\pi}$.

On vérifie que l'on a bien un maximum à l'aide du test de la dérivée seconde. Comme $A'' = -\pi$, la dérivée seconde est toujours négative et on a un maximum.

Les dimensions du rectangle sont $x = \frac{200}{\pi}$ et $y = 100$.