Exercices sur la définition de dérivée – Calcul différentiel

Département de mathématiques – Cégep de Saint-Laurent
201-735 – Hiver 2018 – Professeur : Yannick Delbecque
http://prof.delbecque.org – prof@delbecque.org – Bureau C286 – 514-747-6521 poste 7289

Préparation algébrique

Question 1
Utiliser le triangle de Pascal pour développer les polynômes suivants.

a) $(x+1)^3$
b) $(x-1)^3$
c) $(x+2)^5$
d) $(x+h)^4$
e) $(1-r)^6$
f) $(2x^2-3)^4$

Question 2
Mettre au dénominateur commun les fractions algébriques suivante. Simplifier le résultat.

a) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x}$
b) $\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{x+1}{(x-1)}$
c) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{(x-2)^2}$
d) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x^2(x-2)}$
e) $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{x^2}{(x-1)}$
f) $\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x+1}{(x^2+1)}$
g) $\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{x+1}{x-1}$
h) $\dfrac{x}{x^2+1}-\dfrac{x}{x^2+x+1}$

Question 3
Utilisez le conjugué pour éliminer les racines carrées au dénominateur ou au numérateur.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$
b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}$
c) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}$
d) $\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}$
e) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+3}$
f) $\dfrac{x}{\sqrt{x}-3}$
g) $\dfrac{x}{(2x+1)(\sqrt{x}-3)}$
h) $\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}+1}$
i) $\dfrac{\sqrt{3x-1}-\sqrt{x}}{2x-1}$

Taux de variation moyen

Question 4
Déterminer les valeurs suivantes ; simplifier le résultat.

a) Δy si $f(x)=x^2$ et x varie de 0 à 5.
b) Δy si $f(x)=x^2$ et x varie de -2 à 2.
c) Δy si $f(x)=x^2$ et x varie de -3 à -2.
d) Δy si $f(x)=x^3$ et x varie de -2 à 3.
e) Δy si $f(x)=\frac{1}{x}$ et x varie de 1 à 3.
f) Δy si $f(x)=x^2$ et x varie de 0 à Δx.
g) Δy si $f(x)=x^2$ et x varie de 1 à $1+\Delta x$.
h) Δy si $f(x)=x^3$ et x varie de -2 à $-2+\Delta x$.
i) Δy si $f(x)=\frac{1}{x}$ et x varie de 1 à $1+\Delta x$.
j) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ si $f(x)=\dfrac{1}{x}$ quand x varie de 1 à 3.
k) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ si $f(x)=\dfrac{1}{x}$ quand x varie de 1 à $1+\Delta x$.
l) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ si $f(x)=x^2$ quand x varie de x à $x+\Delta x$.
m) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ si $f(x)=x^3$ quand x varie de x à $x+\Delta x$
n) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ si $f(x)=\dfrac{1}{x}$ quand x varie de x à $x+\Delta x$
o) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ si $f(x)=\sqrt{x}$ quand x varie de x à $x+\Delta x$

Question 5
Déterminer l'équation de la droite $y=ax+b$ qui passe par les points donnés. Faire une esquisse représentant la fonction et la droite.

a) $(1,f(1))$ et $(2,f(2))$ pour $f(x)=x^2$
b) $(0,f(0))$ et $(2,f(2))$ pour $f(x)=x^3$
c) $(1,f(1))$ et $(2,f(2))$ pour $f(x)=\frac{1}{x}$
d) $(1,f(1))$ et $(2,f(2))$ pour $f(x)=\sqrt{x}$
e) $(0,f(0))$ et $(\Delta x,f(\Delta x))$ pour $f(x)=x^3$
f) $(1,f(1))$ et $(1+\Delta x,f(1+\Delta x))$ pour $f(x)=x^2$

Question 6
Montrer que l'équation de la droite qui passe par les points $(a,f(a))$ et $(a+\Delta x),f(a+\Delta x)$ du graphe d'une fonction f est

$$y=f(a)+\frac{\Delta y}{\Delta x}(x-a).$$

Faire une esquisse représentant la situation.

Question 7
Soit la fonction définie par l'équation $y=x^3$. Calculer le taux de variation moyen $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sur l'intervalle demandé. Donner la valeur de Δx pour chacun des cas

a) $[2,4]$ b) $[2,3]$ c) $[2,2.1]$ d) $[2,2.01]$ e) $[2,2.001]$.

Question 8
Déterminer à l'aide des résultats de la question précédente vers quel nombre semble s'approcher le taux de variation de $y=x^3$ entre 2 et $2+\Delta x$ lorsque Δ devient infiniment petit ?

Question 9
Soit la fonction $f(x) = x^3 - x$. Calculer les taux de variation moyens suivants en simplifiant les fractions algébriques obtenues. L'identité algébrique suivante pourrait être utile : $A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$.

a) $\text{TVM}_{[2,4]} f(x)$. b) $\text{TVM}_{[a,b]} f(x)$. c) $\text{TVM}_{[x,x+\Delta x]} f(x)$.

Question 10
Loi de refroidissement (ou du réchauffement) de Newton : si T est la température d'un objet, A la température ambiante et t le temps écoulé, le taux de variation $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ de la température par rapport au temps est proportionnel à la différence entre la température de l'objet et la température ambiante :

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = C(T - A)$$

où C est la constante de proportionnalité (qui dépend du système).

Après la chute de météorites survenue sur la ville de Tcheliabinsk en Russie en février 2013, des chercheurs s'apprêtent à récupérer des fragments de la météorite dans la zone sinistrée.

Les chercheurs sont arrivés sur le site à 14 h et ont remarqué que la température d'un fragment était de 140°C. Deux heures plus tard, la température a chuté de 50°C.

Sachant que la température ce jour là était de -10°C et que la météorite a touché le sol à 10 h, déterminer la température du fragment au moment précis où la météorite a touché le sol.

Taux de variation instantané

Question 11
Déterminer le TVI $\frac{dy}{dx}$ des fonctions suivantes au point donné (sans utiliser les formules de dérivation). Déterminer l'équation de la droite tangente au graphe de f à ce point.

a) $y = x^2$ quand $x = 2$.
b) $y = x^2 - 1$ quand $x = 2$.
c) $y = x^3$ quand $x = 2$.
d) $y = 3x$ quand $x = 2$.
e) $y = 2$ quand $x = 2$.
f) $y = \frac{1}{x}$ quand $x = 2$.
g) $y = \frac{3}{x^2}$ quand $x = 2$.
h) $y = x^2$ quand $x = a$.
i) $y = x^3$ quand $x = a$.
j) $y = \frac{1}{x}$ quand $x = a$.

Question 12
Déterminer laquelle des deux fonctions suivantes croit le plus rapidement en $x = 1$:

$$f(x) = x^2 \text{ ou } f(x) = -\frac{1}{x}?$$

Question 13
La fonction donnant l'aire d'un cercle (en centimètres carrés) par rapport à son rayon (en centimètres) est $A(r) = \pi r^2$

a) Quelle est la variation de l'aire du cercle si le rayon passe de 2 cm à 4 cm ?
b) Quelle est le taux de variation moyen de l'aire du cercle si le rayon passe de 2 cm à 4 cm ?
c) Quelle est le taux de variation instantané de l'aire du cercle lorsque le rayon est de 4 cm ?

Question 14
Supposons que durant les deux premières années de sa vie, la masse (en kilogrammes) d'un bébé en fonction du temps t (en mois) écoulé depuis sa naissance est donnée par la fonction $m(t) = \sqrt{12 + 7t}$.

a) Quelle est la masse du bébé à sa naissance ?
b) Évaluer l'expression $\dfrac{m(8) - m(5)}{3}$ et en donner un interprétation.
c) Quelle fonction donne le taux de croissance instantané de la masse du bébé ?
d) Quel est le taux de croissance instantané de la masse du bébé lorsque celui-ci est âgé de 9 mois ? Interpréter.
e) Le bébé grossit-il plus rapidement à 3 mois ou à 9 mois ?

Différentielles et fonctions dérivées

Question 15
Déterminer dy à l'aide de la définition différentielle.

a) si $y = x^4$
b) si $y = \frac{1}{x^2}$
c) si $y = \frac{x^2}{x+1}$
d) si $y = 1 - x^2$
e) si $y = x^2 + x + 1$
f) si $y = \sqrt{x-1}$

Question 16
En utilisant les résultats de la question précédente, déterminer l'erreur absolue sur y pour $x = 2$ et $x = 10$ si l'erreur en x est 0.1. Pour laquelle des deux valeurs de x l'erreur en y est-elle la plus grande ?

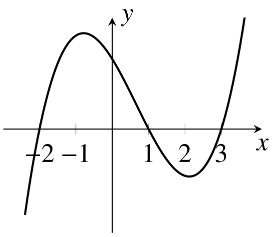
a) si $y = x^4$
b) si $y = \frac{1}{x^2}$
c) si $y = \frac{x^2}{x+1}$
d) si $y = 1 - x^2$
e) si $y = x^2 + x + 1$
f) si $y = \sqrt{x-1}$

Question 17
Trouver la dérivée des fonctions suivantes en utilisant la définition en terme de différentielle.

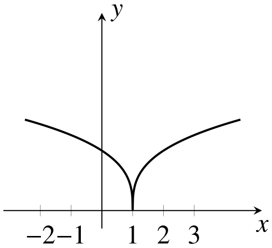
a) $f(x) = x^2$
b) $f(x) = x^3$
c) $g(x) = \sqrt{x+3}$
d) $h(x) = \dfrac{x+3}{x+5}$
e) $f(x) = 2x^2 - x$; $f'(2)$.
f) $x(t) = at^2 + bt + c$; $\dfrac{dx}{dt}$.
g) $y = \sqrt{x^2+1}$; $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=-1}$.
h) $g(x) = \dfrac{2}{3x} - \dfrac{1}{3x^2}$; $g'(x)$.

Question 18
Associer chacune des fonctions suivantes (à gauche) à sa dérivée (à droite).

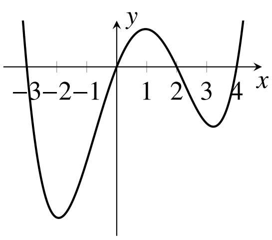
a)



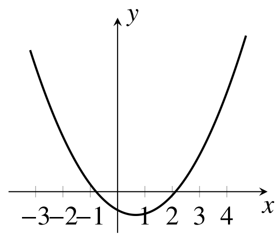
b)



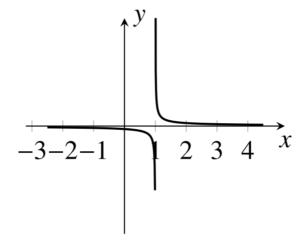
c)



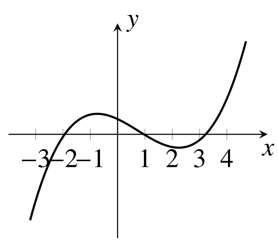
i)



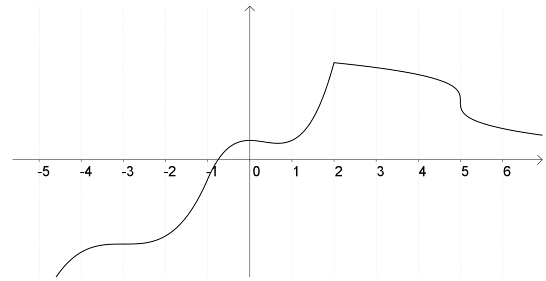
ii)



iii)



Question 19
Soit la fonction représentée par le graphique ci-dessous.



a) Pour quelle(s) valeur(s) de x la dérivée de cette fonction est-elle nulle ?

b) Pour quelle(s) valeur(s) de x cette fonction n'est-elle pas dérivable ?

c) La dérivée de cette fonction est-elle plus grande en $x = -1$ ou en $x = 1$?

Solutions

Question 1

a) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.
b) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.
c) $x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$.
d) $x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4$.
e) $r^6 - 6r^5 + 15r^4 - 20r^3 + 15r^2 - 6r + 1$.
f) $16x^8 - 96x^6 + 216x^4 - 216x^2 + 81$.

Question 2

a) $\dfrac{2(x-1)}{x(x-2)}$.
b) $-\dfrac{3x+1}{(x-1)(x+1)}$.
c) $\dfrac{(x-1)}{(x-2)^2}$.
d) $\dfrac{(x^2+1)}{x^2(x-2)}$.
e) $\dfrac{x(x^2-x-1)}{(x-1)(x-2)}$.
f) $\dfrac{x(x+1)^2}{(x^2+1)(x-1)}$.
g) $\dfrac{x^2+2x+2}{(x-1)(x+1)}$.
h) $\dfrac{x^2}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$.

Question 3

a) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{x-2)}$.
b) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{2-x)}$.
c) $\dfrac{\sqrt{x}+2}{x-4)}$.
d) $\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-x)}$.
e) $\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9)}$.
f) $\dfrac{x(\sqrt{x}+3)}{x-9)}$.
g) $\dfrac{x(\sqrt{x}+3)}{(2x+1)(x-9)}$.
h) $\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{2x}$.
i) $\dfrac{1}{\sqrt{3x-1}+\sqrt{x}}$.

Question 4

a) $\Delta y = 25$
b) $\Delta y = 0$
c) $\Delta y = -5$
d) $\Delta y = 35$
e) $\Delta y = -2/3$
f) $\Delta y = \Delta x^2$
g) $\Delta y = (1+\Delta x)^2$-1
h) $\Delta y = (-2+\Delta x)^3 - 8$
i) $\Delta y = \frac{1}{1+\Delta x} - 1$
j) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1/3 - 1/1}{2} = -\frac{1}{3}$
k) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\frac{1}{1+\Delta x} - 1}{\Delta x}$
l) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$
m) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$

$$= \frac{x^3 + x^2\Delta x + x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3}{\Delta x}$$
$$= \frac{x^2\Delta x + x\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x}$$
$$= \frac{\Delta x(x^2\Delta x + x\Delta x^2 + \Delta x^3)}{\Delta x}$$
$$= x^2\Delta x + x\Delta x^2 + \Delta x^3$$

n) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\dfrac{1}{x+\Delta x} - \dfrac{1}{x}}{\Delta x}$
o) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$

Question 5

a) $y = 3x - 2$

b) $y = 4x$

c) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

d) $(\sqrt{2} - 1)x - (\sqrt{2} + 2)$

e) $x\Delta x^2$

f) $y = \dfrac{(1+\Delta x)^2}{\Delta x}x + \left((1 - \dfrac{(1+\Delta x)^2}{\Delta x}\right)$

Question 6

On peut faire la démonstration de différentes manières. Montrons que que la droite définie par l'équation donnée passe par les deux points donnés. En $(a, f(a))$, on a que

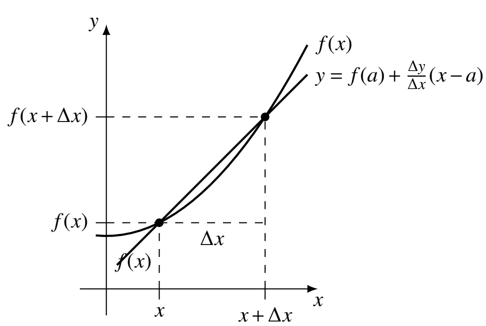
$$\begin{aligned} y &= f(a) + \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - a) \\ f(a) &= f(a) + \frac{\Delta y}{\Delta x}(a - a) \\ f(a) &= f(a) \end{aligned}$$

L'équation de la droite est donc satisfaite en ce point.

Au point $(a + \Delta x, f(a + \Delta x))$, on a que

$$\begin{aligned} y &= f(a) + \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - a) \\ f(a+\Delta x) &= f(a) + \frac{\Delta y}{\Delta x}((a + \Delta x) - a) \\ f(a+\Delta x) &= f(a) + \frac{\Delta y}{\Delta x}\Delta x \\ f(a+\Delta x) &= f(a) + \Delta y \\ f(a+\Delta x) &= f(a) + (f(a+\Delta x) - f(a)) \\ f(a+\Delta x) &= f(a+\Delta x) \end{aligned}$$

L'équation de la droite est donc aussi satisfaite pour l'autre point. Ainsi, comme la droite passe par les deux points donnés, c'est bien l'équation de la droite cherchée.



Question 7

a) $\frac{4^3-2^3}{4-2} = 28$, $\Delta x = 2$

b) 19, $\Delta x = 1$

c) 12.61, $\Delta x = 0.1$

d) 12.0601, $\Delta x = 0.01$

e) 12.006001, $\Delta x = 0.001$

Question 8

12

Question 9

a) 27

b) $\dfrac{b^3 - b - \left(a^3 - a\right)}{b - a} = b^2 + ab + a^2 - 1$

c) $\dfrac{(x+\Delta x)^3 - (x + \Delta x) - \left(x^3 - x\right)}{\Delta x}$
$= 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2 - 1$

Question 10

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T}{\Delta t} &= C(T - A) \\ \frac{90}{2} &= C(140 - (-10)) \\ 45 &= C(150) \\ C &= \frac{150}{45} = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T}{\Delta t} &= \frac{10}{3}(T + 10) \\ \Delta T &= \frac{10}{3}(T + 10)\Delta t \\ \Delta T &= \frac{10}{3}(140 + 10)(10 - 14) \\ \Delta T &= \frac{10}{3}(150)(-4) = -2000 \\ \Delta T &= T_{\text{fin}} - T_{\text{ini}} \\ T_{\text{ini}} = T_{\text{fin}} - \Delta T &= 140 - (-2000) = 2140. \end{aligned}$$

Question 11

a) 4, $y = 4x - 4$

b) 4, $y = 4x - 5$

c) 12, $y = 12x - 16$

d) 3, $y = 3x$

e) 0, $y = 2$

f) $-\frac{1}{4}$, $y = -\frac{x}{4} + 1$

g) $-\frac{3}{4}$, $y = -\frac{3x}{8}x + \frac{9}{4}$

h) $2a$, $y = 2ax - a^2$

i) $3a^2$ $y = 3a^3x - 2a^3$

j) $-\frac{1}{a^2}$ $y = -\frac{x}{a^2} + \frac{2}{a}$

Question 12

$\text{TVI}_f(1) = 2$, $\text{TVI}_g(1) = 1$, la fonction f croit donc plus rapidement que g en $x = 1$.

Question 13

a) 12π cm^2

b) 6π cm

c) 8π cm

Question 14

a) $\sqrt{12}$ kg

b) Entre l'âge de 5 mois et 8 mois, la masse de ce bébé a augmenté à un taux moyen de $\frac{\sqrt{68} - \sqrt{47}}{3}$ kg/mois $\approx = 0,4635$ kg/mois.

c) $m'(t) = \dfrac{7}{2\sqrt{12 + 7t}}$.

d) À l'âge d'exactement 9 mois, le bébé grossit à un taux de
$$m'(9) = \frac{7}{2\sqrt{75}} \text{ kg/mois.}$$

e) Le bébé grossi plus rapidement à 3 mois, car $\text{TVI}_3(m) > \text{TVI}_9(m)$.

Question 15

a) $dy = 4x^3\,dx$

b) $dy = -\frac{2}{x^3}\,dx$

c) $dy = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}\,dx$

d) $dy = -2x\,dx$

e) $dy = 2x + 1\,dx$

f) $dy = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\,dx$

Question 16

a) $|dy| = 3.2$; $|dy| = 400$

b) $|dy| = 0.025$; $|dy| = 0.0002$

c) $|dy| \approx 0.089$; $|dy| \approx 0.0991$

d) $|dy| = 0.4$; $|dy| = 2$

e) $|dy| = 0.5$; $|dy| = 2.1$

f) $|dy| = 0.05$; $|dy| \approx 0.1667$

Question 17

a) $f'(x) = 2x$

b) $f'(x) = 3x^2$

c) $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}$

d) $h'(x) = \dfrac{2}{(x+5)^2}$

e) 7

f) $2at + b$

g) -2

h) $g'(x) = \frac{-2}{3x^2} + \frac{2}{3x^3}$

Question 18

a) ii)

b) i)

c) iii)

Question 19

a) $x \in \left\{-3, -\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right\}$

b) $x \in \{2, 5\}$

c) En $x = -1$