

Exercices de révision

Calcul différentiel – Automne 2018 – Yannick Delbecque

Notation, logique, nombres

Question 1

Donner la contraposée des énoncés suivants.

- a) « si $x \in \mathbb{Z}$, alors $x \in \mathbb{Q}$ »
- b) « Si une fonction f est continue en $x = a$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. »
- c) « Quand la fenêtre est ouverte, la pluie entre dans le salon. »
- d) « Si j'ai mes souliers, je n'ai pas mal aux pieds en marchant »
- e) « Si X est humain, alors X est mortel. »
- f) « Tous les fruits sont des légumes. »
- g) « Si n est pair, alors $n + 1$ est impair. »

Question 2

Mettre les nombres périodiques $0.\overline{123}$ et $2.\overline{18}$ sous forme de fractions.

Question 3 (Défi difficile)

Démontrer que $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre rationnel en utilisant le lemme suivant (qu'il n'est pas nécessaire de prouver) :

n est un multiple de 3 ssi n^2 est un multiple de trois.

Indice : s'inspirer de la preuve vue en classe pour $\sqrt{2}$.

Question 4 (Défi difficile)

Démontrer que $\log_2 3$ n'est pas un nombre rationnel en utilisant le fait que la décomposition en facteurs premiers est unique. Indice : s'inspirer (un peu moins) de la preuve vue en classe pour $\sqrt{2}$.

Question 5

Effectuer les opérations suivantes.

- a) $\{1, \pi, 2\pi\} \cup \{1, 2, 3, 4\}$
- b) $\{1, \pi, 2\pi, 3\} \cap \{1, 2, 3, 4\}$
- c) $\{1, \pi, 4, 5\} \setminus \{1, 2, 3, 4\}$
- d) $[2, 5] \cup]4, 8]$
- e) $[2, 5] \cap]4, 8]$
- f) $[2, 5] \setminus]4, 8]$
- g) $\mathbb{N} \cap [0.5, \pi]$
- h) $\mathbb{Q} \cap \{0.5, \pi, 3.14159, e, \sqrt{2}, 3/5\}$
- i) $\{0.5, \pi, 3.14159, e, \sqrt{2}, 3/5\} \setminus \mathbb{Q}$

Question 6

Décrire les ensembles suivants à l'aide d'intervalles

- a) $\{x \mid x \geq -3 \text{ et } x < \pi\}$
- b) $\{x \mid x - 2 < 5\}$
- c) $\{x \mid x < 3 \text{ et } 0 < x \text{ et } x \leq 1/2\}$
- d) $\{x \mid x^2 < 4\}$

Exposants et logarithmes

Question 7

Simplifier et réécrire les expressions suivantes pour que le résultat n'ai aucun exposant fractionnaire ou négatif.

- a) 2^{-3}
- b) $2^{1/2}$
- c) $(2^{1/2})^3$
- d) $2^{1/2} 2^{-5/2}$
- e) $(2^{1/2} + 3^{1/2})^{-2}$
- f) $\log_2(2^{-5})$
- g) $2^{\log_2(3)}$
- h) $\log_2(2^{1/2})$
- i) $3 \log_2(2^{1/3})$

Question 8

Mettre les expressions suivantes sous la forme

$$C(x-a)^b$$

où a et b et C sont des nombres réels.

- a) $\frac{1}{x^3}$
- b) $\frac{2}{x^3}$
- c) $\frac{2}{3x^5}$
- d) $\frac{1}{(x-3)^2}$
- e) $\frac{7}{(x+1)^6}$
- f) \sqrt{x}
- g) $\sqrt[3]{x-2}$
- h) $\frac{\sqrt[4]{x+2}}{5}$
- i) $\frac{1}{\sqrt{x}}$
- j) $\frac{2}{\sqrt[3]{x}}$
- k) $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$
- l) $\sqrt{x^3}$
- m) $\sqrt[4]{(x-3)^5}$
- n) $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$
- o) $\frac{4}{3\sqrt[5]{x^4}}$
- p) $(2x-3)^2$
- q) $(2x)^3$
- r) $(2x-1)^3$
- s) $\sqrt{4x-1}$
- t) $\frac{(x-2)^2}{\sqrt{x-2}}$
- u) $\frac{3(x+1)}{4\sqrt[3]{x+1}}$
- v) $\frac{2\sqrt[5]{x+1}}{5\sqrt{x+1}}$

Droites

Question 9

Déterminer la pente et l'ordonnée à l'origine des droites suivantes.

- a) La droite d'équation $3x + 2y = 1$.
- b) La droite d'équation $\frac{x}{5} + \frac{2y}{3} = 1$.
- c) La droite d'équation $y = -3(x-2) + 1$
- d) La droite d'équation $\sqrt{2}x + \log_2(3)y = \sqrt{3}$

Question 10

Donner l'équation de la droite...

- de pente -5 qui passe par le point $(-3, 4)$;
- passant par les points $(-2, 4)$ et $(1, -5)$;
- parallèle à la droite trouvée en a) qui passe par le point $(1, -2)$.

Paraboles**Question 11**

Trouver les zéros de chacune des fonctions polynomiales ci-dessous en factorisant.

- $f(x) = x^2 + 7x + 12$
- $f(x) = 9 - 4x^2$
- $f(x) = 3x^2 + 5x$
- $f(x) = -x^2 - 100$

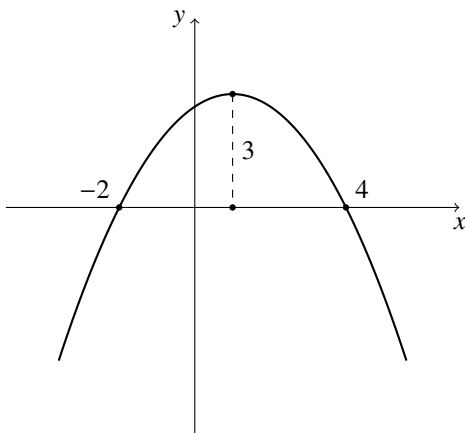
Question 12

Utiliser la formule quadratique pour trouver les zéros de chacune des fonctions suivantes.

- $f(x) = -3x^2 + 2x - 6$
- $f(x) = 6x^2 - 17x + 12$
- $f(x) = x^2 + 11$
- $f(x) = 9x^2 - 6x + 1$

Question 13

Déterminer quelle fonction quadratique de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ est illustrée dans le graphe suivant.

**Polynômes****Question 14**

Factoriser complètement les polynômes suivants.

- $4x^3 - 3x^2 + 4x - 3$
- $x^2 + 5x + 6$
- $9x^2 + 12x + 4$
- $16x^2 - 81$
- $x^2 + 25$
- $3x^3 - 108x$
- $18x^5 + 32x^3$
- $x^4 - 5x^2 + 4$

Question 15

Trouver les zéros des fonctions polynomiales suivantes.

- $f(x) = 4x - 3$
- $f(x) = 2$
- $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$
- $f(x) = (x - 1)(x + 1)$
- $f(x) = x(x - 1)(x + \sqrt{2})$
- $f(x) = \frac{(x - 2)(x + 1)}{x^2 + 3}$

Question 16

Effectuer les divisions polynomiales suivantes.

- $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$
- $\frac{x^2 - 1}{x + 1}$
- $\frac{x^2 + 1}{x - 1}$
- $\frac{x^3 - 1}{x - 1}$
- $\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$
- $\frac{x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 1}{x - 1}$
- $\frac{x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 2}{x + 1}$

Question 17

Le polynôme $P(x) = x^3 - 4x^2 + 8x - 15$ peut également s'écrire de la manière suivante.

$$P(x) = (x - 3)(x^2 - x + 5)$$

- Peut-on le factoriser davantage? Expliquer.
- Vérifier que $x = 3$ est un zéro de $P(x)$ dans les deux formes données dans la question.
- Trouver, s'il y en a, d'autres valeurs de x pour lesquelles $P(x) = 0$.

Question 18

Soit le polynôme $P(x) = x^4 - 5x^3 - 8x^2 - 24$.

- Sans effectuer de division, dire si $(x - 2)$ est un facteur de $P(x)$.
- Est-ce que $(x + 2)$ divise $P(x)$?

Question 19

Soit le polynôme $P(x) = x^4 + 3x^2 + 2$.

- Ce polynôme a-t-il des zéros?
- Existe-t-il une factorisation pour de $P(x)$?
- Cela contredit-il le théorème de factorisation? Expliquer.

Fonctions

Question 20

Substituer (sans simplifier)...

- | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------------------|
| a) y à x dans $x^2 + 3x + 4$ | e) $x + \delta x$ à x dans $x^2 + 3x + 4$ |
| b) $y + 1$ à x dans $x^2 + 3x + 4$ | f) $x + \delta x$ à x dans $\frac{1}{x^2 + 1}$ |
| c) $y + h$ à x dans $x^2 + 3x + 4$ | g) $x + \delta x$ à x dans $\frac{1}{(x+1)^2}$ |
| d) x^2 à x dans $x^2 + 3x + 4$ | |

Question 21

Évaluer...

- | | |
|-----------------------------------------|--------------------------------------------------|
| a) $f(3)$ si $f(x) = x^3$ | j) $f(1)$ si $f(x) = x^{5/2}$ |
| b) $f(1)$ si $f(x) = x^{3/2}$ | k) $f(x+h)$ si $f(x) = x^{5/2}$ |
| c) $f(9)$ si $f(x) = x^{3/2}$ | l) $f(2)$ si $f(x) = \log(x-1)$ |
| d) $f(\sqrt[3]{2})$ si $f(x) = x^{3/2}$ | m) $f(0)$ si $f(x) = 2^{(x-1)}$ |
| e) $f(2)$ si $f(x) = 2^{2/3}x^{1/3}$ | n) $f(-1)$ si $f(x) = \frac{1}{x+1}$ |
| f) $f(1+h)$ si $f(x) = x^2$ | o) $f(1)$ si $f(x) = 2^{(x-1)}$ |
| g) $f(3+h)$ si $f(x) = x^3$ | p) $f(x+\Delta x)$ si $f(x) = x-1$ |
| h) $f(y)$ si $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ | q) $f(x+\Delta x)$ si $f(x) = \frac{1}{x^2} - 1$ |
| i) $f(y+h)$ si $f(x) = \frac{1}{x}$ | r) $f(x+\Delta x)$ si $f(x) = (x+1)^2 - x$ |

Question 22

Considérons les fonctions définies par $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2$ et $h(x) = \frac{1}{x+1}$. Évaluer les expressions suivantes.

- | | | |
|------------------|---------------|-----------------------------|
| a) $3f(x) - 5$ | d) $f(x)g(x)$ | g) $[f \circ g \circ h](x)$ |
| b) $f(3x - 5)$ | e) $f(g(x))$ | h) $[h \circ g \circ f](x)$ |
| c) $f(x) + h(x)$ | f) $g(f(x))$ | i) $[g \circ h \circ f](x)$ |

Question 23

Soit la fonction définie par $f(x) = x^3 - 4x$.

- Donner l'équation de la droite passant par $(-1, f(-1))$ et $(2, f(2))$
- Vérifier que le point $(1, -3)$ sont sur le graphe de f
- Donner l'équation de la droite passant par $(1, -3)$ et $(2, f(2))$

Question 24

Faire une esquisse du graphe des fonctions suivantes.

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------------------|
| a) $f(x) = (x-2)^2 + 1$ | c) $f(x) = -(x + \sqrt{3})^2 + 2\sqrt{2}$ |
| b) $f(x) = \frac{1}{x+2} - 1$ | d) $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$ |

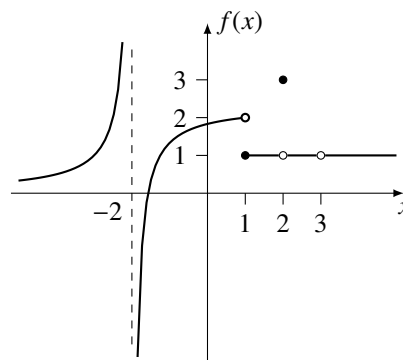
Question 25

Déterminer lesquelles des équations suivantes définissent des fonctions si on considère x comme variable indépendante et y comme variable dépendante. Si l'équation donnée définit une fonction, donner la règle de correspondance et son domaine de définition.

- | | | |
|--------------------|------------------------|----------------------------------|
| a) $yx = 1$ | e) $2^x = y^2$ | h) $\frac{1}{y} = \frac{1}{x^2}$ |
| b) $x + y = 1$ | f) $2^y = x^2$ | i) $\sin(y) = x$ |
| c) $x^2 + y^2 = 1$ | g) $2x^2 - y + 8 = 3x$ | j) $\sin(x) = 3y + 2$ |
| d) $x^3 + y^3 = 0$ | | |

Question 26

Soit f la fonction ayant le graphe suivant. Évaluer f pour les valeurs de x données.



- | | | |
|-------------|--------------|--------------|
| a) $x = -2$ | c) $x = 3/2$ | e) $x = 3$ |
| b) $x = 1$ | d) $x = 2$ | f) $x = \pi$ |

Question 27

Soit f la fonction définie de la manière suivante.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < -2 \\ -x & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

- Évaluer $f(-3)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(1/2)$, $f(1)$, $f(2)$.
- Quel est le domaine de f ?

Question 28

Soit f la fonction définie de la manière suivante.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } x \leq 2 \\ x & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

- Évaluer $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$.
- Quel est le domaine de f ?

Question 29

La fonction *valeur absolue* est la fonction définie de la manière suivante.

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$

- a) Évaluer $|-3|$, $|0|$, $|2|$.
- b) Quel est le domaine de la fonction valeur absolue ?
- c) Est-ce que la fonction valeur absolue admet une fonction inverse ?
- d) Montrer que $|x| = \sqrt{x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- e) Montrer que $|ab| = |a||b|$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$. (Ind. Utiliser le résultat précédent).

Question 30

La distance $d(x_1, x_2)$ entre x_1 et x_2 sur la droite réelle peut être définie par

$$d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|.$$

Utiliser cette idée de distance pour déterminer quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ satisfont les relations suivantes. (ind. faire une esquisse rapide peut aider !)

- a) $|x - 1| = 1$ c) $|x + 1| \leq 2$ e) $|x| > 1$
 b) $|x - 2| < 1$ d) $|x| < \sqrt{2}$ f) $|x| = \pi$

Question 31

Déterminer si les fonctions f et g suivantes sont des fonctions inverses une de l'autre.

- a) $f(x) = 2x - 3$ et $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$
 b) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ et $g(x) = x^3 - 1$
 c) $f(x) = \frac{2x+1}{3x-2}$ et $g(x) = \frac{2x+1}{3x-2}$

Question 32

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes.

- a) $f(x) = x^{100} + x^{50} + 1$ k) $f(x) = \sqrt{(x-1)^3}$
 b) $f(x) = \frac{1}{2x-3}$ l) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
 c) $f(x) = \frac{1}{(x-3)(x+2)}$ m) $f(x) = \sqrt{(x^2+1)}$
 d) $f(x) = \frac{3x-1}{2x+5}$ n) $f(x) = \frac{-x+2}{x^3-x^2+5x}$
 e) $f(x) = \frac{2}{x^2-16}$ o) $f(x) = |x^3 - 1|$
 f) $f(x) = \frac{3}{(x-4)^2}$ p) $f(x) = \frac{1}{|x-1|}$
 g) $f(x) = \frac{2x^2-3x-5}{x^2-x-2}$ q) $f(x) = \frac{1}{|x-1|}$
 h) $f(x) = \sqrt{x-1}$ r) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4x-5}}$
 i) $f(x) = \sqrt{2x-5}$ s) $f(x) = \frac{1}{\log(x-4)-1}$
 j) $f(x) = \sqrt{x^3}$ t) $f(x) = \sqrt{\frac{2x-x^2}{x^2+x-2}}$

Question 33

Déterminer les points de croisement avec les axes des fonctions suivantes.

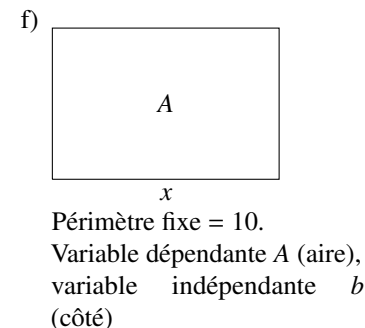
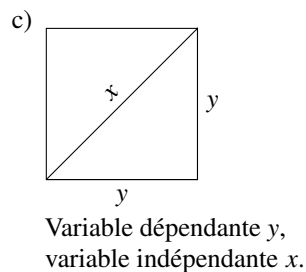
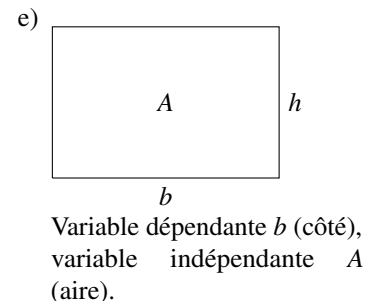
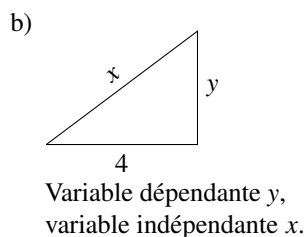
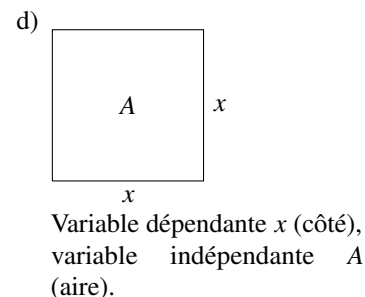
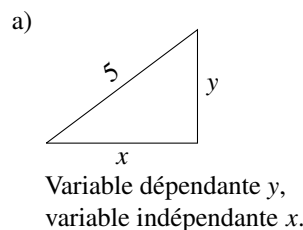
- a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ d) $f(x) = x^4 - 16$
 b) $f(x) = (x - 3\sqrt{3})^{2/3}$ e) $f(x) = x^3 + 27$
 c) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 3x + 4}$ f) $f(x) = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$

Question 34

Quelle est la pente de la droite passant par les points correspondants aux valeurs $x = 2$ et $x = 3$ du graphe de la fonction $f(x) = x^3$?

Question 35

Exprimer algébriquement la variable dépendante en fonction de la variable indépendante en utilisant les relations géométrique déterminée par les figures suivantes. Note : considérez tout les angles en radians et que les longueurs sont positives. Toutes les dimensions autres que indépendante et dépendante sont considérées comme des constantes.



Solutions

Question 1

- a) si $x \notin \mathbb{Q}$, alors $x \notin \mathbb{Z}$
- b) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$, alors f n'est pas continue en $x = a$.
- c) Si la pluie n'entre pas dans le salon, alors la fenêtre est fermée.
- d) Si j'ai mal au pieds en marchant, alors je n'ai pas mes souliers.
- e) Si X n'est pas mortel, alors X n'est pas humain.
- f) Si ce n'est pas un légume, ce n'est pas un fruit.
- g) Si $n+1$ est pair, alors n est impair.

Question 2

Soit $x = 0,12\bar{3}$
 . On multiplie par 1000 pour obtenir
 $1000x = 123,12\bar{3}$.

En soustrayant $1000x - x$, on obtient

$$999x = 123$$

et donc $x = \frac{123}{999} = \frac{41}{333}$

Soit $y = 2,1\bar{8}$
 . On multiplie par 100 pour obtenir

$$100y = 218,1\bar{8}$$

En soustrayant $100y - y$, on obtient

$$99x = 216$$

et donc $x = \frac{216}{99} = 2,1\bar{6}$

Question 3

Si $\sqrt{3}$ est un nombre rationnel, il peut s'écrire sous la forme d'une fraction simplifiée :

$$\sqrt{3} = \frac{m}{n}$$

. En multipliant par n et en prenant le carré, on obtient

$$3n^2 = m^2$$

m^2 est donc un multiple de trois, et donc m aussi (par le lemme donné). Si $m = 3k$, on a en substituant $3k$ à m dans la dernière équation, on obtient l'égalité

$$3n^2 = 9k^2$$

En divisant par 3, on obtient

$$n^2 = 3k^2$$

Cette fois-ci, n^2 est un multiple de 3, et donc n est aussi un multiple de 3.

Question 4

Si $\log_2(3)$ est une fraction, on peut l'écrire comme une fraction déjà simplifiée

$$\log_2(3) = \frac{m}{n}$$

Par définition des logarithmes, cela est équivalent à dire que

$$3 = 2^{m/n}$$

En prenant la puissance n de chaque membre de l'égalité et en simplifiant les exposants avec les propriétés des exposants, on obtient

$$3^n = 2^m$$

Comme 2 et 3 sont des nombres premiers et que la décomposition en facteurs premiers est unique, il est impossible qu'une puissance de 2 soit aussi une puissance de 3 (sans qu'on aurait deux décompositions différentes en facteurs premiers pour un même nombre!). L'hypothèse que $\log_2(3)$ est rationnel est donc fautive et

$$\log_2(3) \notin \mathbb{Q}$$

Question 5

- a) $\{1, 2, 3, 4, \pi, 2\pi\}$
- b) $\{1, 3\}$
- c) $\{\pi, 5\}$
- d) $[2, 8]$
- e) $]4, 5]$
- f) $[2, 4]$
- g) $\{1, 2, 3\}$
- h) $\{0, 5, 3, 14159, 3/5\}$
- i) $\{\pi, e, \sqrt{2}\}$

Question 6

- a) $[-3, \pi[$
- b) $] -\infty, 7[$
- c) $]0, 1/2[$
- d) $] -2, 2[$

Question 7

- a) $\frac{1}{2^3}$
- b) $\sqrt{2}$
- c) $\sqrt{2^3}$
- d) $\frac{1}{2^2}$
- e) $\frac{1}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2}$
- f) -5
- g) 3
- h) $\frac{1}{2}$
- i) 1

Question 8

- a) x^{-3}
- b) $2x^{-3}$
- c) $\frac{2}{3}x^{-5}$
- d) $(x-3)^{-2}$
- e) $7(x+1)^{-6}$
- f) $x^{1/2}$
- g) $(x-2)^{1/3}$
- h) $\frac{1}{5}(x+2)^{1/4}$
- i) $x^{-1/2}$
- j) $2x^{-1/3}$
- k) $\frac{2}{3}x^{-1/5}$
- l) $x^{3/2}$
- m) $(x-3)^{5/4}$
- n) $x^{-3/2}$
- o) $\frac{4}{3^x} - 4/5$
- p) $4(x-3/2)^2$
- q) $8x^3$
- r) $8(x-1/2)^3$
- s) $2(x-1/4)^{-1/2}$
- t) $(x-2)^{3/2}$
- u) $\frac{3}{4}(x+1)^{2/3}$
- v) $\frac{2}{5}(x+1)^{-3/10}$

Question 9

- a) Équation de la droite : $y = -3x/2 + 1/2$. Pente = $-3/2$, ordonnée à l'origine = $1/2$
- b) Équation de la droite : $y = -\frac{3}{10}x + \frac{3}{2}$. Pente = $-3/10$, ordonnée à l'origine = $3/2$
- c) Équation de la droite : $y = -3x + 7$. Pente = -3 , ordonnée à l'origine = 7
- d) Équation de la droite : $y = -\frac{\sqrt{2}}{\log_2(3)}x + \frac{\sqrt{2}}{\log_2(3)}$. Pente = $-\frac{\sqrt{2}}{\log_2(3)}$, ordonnée à l'origine = $\frac{\sqrt{2}}{\log_2(3)}$

Question 10

- a) $y = -5x - 11$
- b) $y = -3x - \frac{14}{3}$
- c) $y = -5x + 3$

Question 11

- a) $x = -3$ et $x = -4$
- b) $x = -\frac{3}{2}$ et $x = \frac{3}{2}$
- c) $x = -\frac{5}{3}$ et $x = 0$
- d) La fonction n'a pas de zéro

Question 12

- a) La fonction n'a pas de zéro
- b) $x = \frac{4}{3}$ et $x = \frac{3}{2}$
- c) La fonction n'a pas de zéro
- d) $x = \frac{1}{3}$ (zéro double)

Question 13

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$$

Question 14

- a) $(4x-3)(x^2+1)$
- b) $(x+2)(x+3)$
- c) $(3x+2)^2$
- d) $(4x-9)(4x+9)$
- e) x^2+25
- f) $3x(x-6)(x+6)$
- g) $2x^3(9x^2+16)$
- h) $(x+2)(x-2)(x+1)(x-1)$

Question 15

- a) $x=3/4$
- b) aucun zéro
- c) $x=2$ et $x=1/2$
- d) $x=1$ et $x=-1$
- e) $x=0, x=1$ et $x=-\sqrt{2}$
- f) $x=2$ et $x=-1$

Question 16

- a) $x+1$
- b) $x-1$
- c) $x+1$ reste 2
- d) x^2+x+1
- e) x reste $x-1$
- f) x^3-2x+1
- g) x^4+2x^2+1 reste 1

Question 17

- a) Non, car le facteur $x^2 - x + 5$ n'a pas de zéro : le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est négatif, il n'y a donc pas de zéros.
- b) Laissez à l'étudiant.
- c) Il n'y en a pas d'autres, d'après la factorisation.

Question 18

- a) $(x-2)$ n'est pas un facteur de $P(x)$
- b) Oui

Question 19

- a) Chacun des termes de $x^4 + 3x^2 + 2$ consistent en une puissance paire de x avec un facteur positif, les valeurs prises par $P(x)$ sont donc toujours strictement positives. Elle n'admet donc pas de zéros.
- b) Il existe une factorisation : $(x^2+1)(x^2+2)$. On peut la trouver en posant $y = x^2$ et en factorisant $y^2 + 3y + 2$.
- c) Chacun des facteurs de ce polynôme est irréductible. $P(x)$ n'a donc pas de facteur du premier degré, donc le théorème n'est pas contredit.

Question 20

- a) $y^2 + 3y + 4$
- b) $(y+1)^2 + 3(y+1) + 4$
- c) $(y+h)^2 + 3(y+h) + 4$
- d) $(x^2)^2 + 3(x) + 4$
- e) $(x+\Delta x)^2 + 3(x+\Delta x) + 4$
- f) $\frac{1}{(x+\Delta x)^2 + 1}$
- g) $\frac{1}{((x+\Delta x)+1)^2}$

Question 21

- a) 27
- b) 1
- c) 27
- d) $\sqrt{2}$
- e) 2
- f) $(1+h)^2 = 1 + 2h + h^2$
- g) $(3+h)^3 = 27 + 27h + 9h^2 + h^3$
- h) $\sqrt{2+1}$
- i) $\frac{1}{y+h}$
- j) 1
- k) $(x+h)^5/2$
- l) 0
- m) $1/2$
- n) Non défini (division par zéro).
- o) 1
- p) $(x+\Delta x) - 1$
- q) $\frac{1}{(x+\Delta x)^2 - 1}$
- r) $((x+\Delta x) + 1)^2 - (x+\Delta x)$

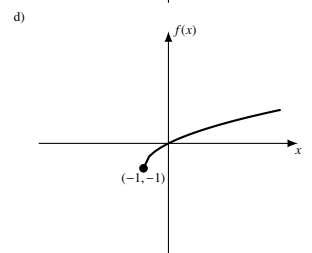
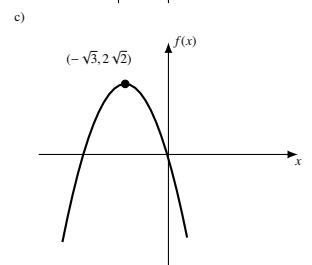
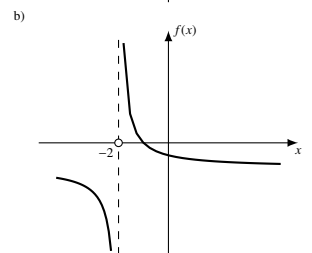
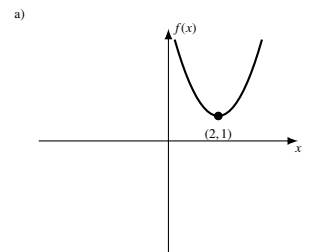
Question 22

- a) $6x-5$
- b) $6x-10$
- c) $2x + \frac{1}{x+1}$
- d) $2x^3$
- e) $2x^2$
- f) $4x^2$
- g) $\frac{2}{(x+1)^2}$
- h) $\frac{1}{4x^2+1}$
- i) $\frac{1}{(2x+1)^2}$

Question 23

- a) $y = -x + 2$
- b) $f(1) = 1^3 - 4(1) = -3$
- c) $y = -3x - 6$

Question 24



Question 25

- a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- b) $f(x) = 1 - x$, $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$.
- c) pas une fonction!
- d) $f(x) = -x$, $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$.
- e) Pas une fonction.
- f) $f(x) = \log_2(x^2)$, $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- g) $f(x) = 2x^2 - 3x + 8$, $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$.
- h) $f(x) = x^2$, $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- i) Pas une fonction.
- j) $f(x) = \frac{\sin(x)-2}{3}$, $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$.

Question 26

- a) $f(-1)$ n'est pas défini
- b) $f(1) = 1$
- c) $f(3/2) = 1$
- d) $f(2) = 3$
- e) $f(3)$ n'est pas défini
- f) $f(\pi) = 1$

Question 27

- a) $f(-3) = 9$, $f(-2) = 2$, $f(0) = 0$, $f(1/2) = -1/2$, $f(1) = -1$, $f(2) = 4$.
- b) $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$.

Question 28

- a) $f(-1) = -1/2$, $f(0) = -1$, $f(1)$ n'est pas défini, $f(2) = 1$.
- b) $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Question 29

- a) $f(-3) = 3, f(0) = 0, f(2) = 2$
 b) \mathbb{R}
 c) Non, car pour une valeur y donnée de l'image il existe généralement 2 valeur x du domaine tels que $|x| = y$.
 d) Si $x \geq 0, |x| = x$ et $\sqrt{x^2} = x$, on a donc l'égalité. Si $x < 0$, alors $|x| = -x$ et $\sqrt{x^2} = -x$. On a donc Dans tout les cas on $\sqrt{x^2} = |x|$, QED.
 e) $|ab| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2 b^2} = \sqrt{a^2} \sqrt{b^2} = |a||b|$, QED.

Question 30

- a) $[2, 0]$
 b) $]1, 3[$
 c) $[-3, 1]$
 d) $] - \sqrt{2}, \sqrt{2}[$
 e) $] - \infty, -1[\cup]1, \infty[$
 f) $\{-\pi, \pi\}$

Question 31

- a) $f(g(x)) = 2\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{2}\right) - 3 = x$ et $g(f(x)) = \frac{2x-3}{2} + \frac{3}{2} = x$, donc f et g sont des fonctions inverses.
 b) f et g sont des fonctions inverses
 c) f et g sont des fonctions inverses

Question 32

- a) $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$
 b) $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{3/2\}$
 c) $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{3, -2\}$
 d) $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-5/2\}$
 e) $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$
 f) $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{4\}$
 g) $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{2, -1\}$
 h) $\text{dom}(f) =]1, \infty[$
 i) $\text{dom}(f) =]5/2, \infty[$
 j) $\text{dom}(f) =]0, \infty[$
 k) $\text{dom}(f) =]1, \infty[$
 l) $\text{dom}(f) =]-\infty, -1[\cup]1, \infty[$
 m) $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$
 n) $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

- o) $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$
 p) $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
 q) $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
 r) $\text{dom}(f) =]-\infty, -1[\cup]5, \infty[$
 s) $\text{dom}(f) =]4, \infty[$
 t) $\text{dom}(f) =]-2, 0[\cup]1, 2[$

Question 33

- a) Ne croise pas l'axe des y , $x = \pm 2$
 b) $y = 3, x = 3\sqrt{3}$
 c) $y = 2, x = -1$ ou 4
 d) $y = -16, x = -2$ ou 2
 e) $y = 27, x = -3$
 f) Ne croise pas l'axe des y , $x = -1/2$

Question 34

$$\frac{3^3 - 2^3}{3 - 2} = 27 - 8 = 19$$

Question 35

- a) $y = \sqrt{25 - x^2}$
 b) $y = \sqrt{x^2 - 16}$
 c) $y = x/\sqrt{2}$
 d) $x = \sqrt{A}$
 e) $h = \frac{A}{b}$
 f) $A = x(5 - x)$