Notes de cours

Calcul différentiel

Yannick Delbecque, Automne 2018

Chapitre 1

Révision

1.1 Questions notations et abréviations

1.1.1 Ensembles

Un **ensemble** est une collection d'éléments. Si x est un élément de de l'ensemble A, on écrit $x \in A$. Sinon, on écrit $x \notin A$. On ne tient pas compte des répétitions dans les ensembles : $\{1,2,3\}$ est le même ensemble que $\{1,2,3,3,3,3\}$!

On peut décrire un ensemble de plusieurs manières.

Compréhension Par un condition qui doit être satisfaite pour qu'un x soit élément de l'ensemble.

$$\{x \mid \text{ condition sur } x\}$$

Extension En donnant une liste des éléments de l'ensemble

$$\{-2,1,\pi,10\}$$

Un même ensemble peut être décrit de plusieurs manières :

$$A = \{0,2,4,6,8\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ est un nombre naturel pair plus petit que} 10\}$$

Les ensembles A et B sont identiques car ils contiennent les mêmes éléments. On écrit $A = B$ pour dire que deux ensembles sont **égaux**, c'est à dire qu'ils contiennent les mêmes éléments.

Cardinalité Un ensemble peut être **infini** comme l'ensemble des nombres pairs ou celui des nombres premiers, ou **fini** comme l'ensemble des facteurs entier du nombre 12. On appelle la taille d'un ensemble sa **cardinalité**.

Opérations de base sur les ensembles

Union

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Intersection

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$

Différence

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$$

Sous-ensemble Si chaque élément d'un ensemble A est aussi un élément d'un ensemble B, alors on dit que A est un **sous-ensemble** de B. On écrit alors

$$A \subseteq B.$$

Ne pas confondre $\in$ (« est élément de ») avec $\subseteq$ (« est sous-ensemble de ».

Ensembles souvent utilisés dans ce cours Dans ce cours, nous discuterons des ensembles de nombres suivants :

Les ensembles de nombres :

$\mathbb{N}$ Les nombres naturels

$\mathbb{Z}$ Les nombres entiers

$\mathbb{Q}$ Les nombres rationnels

$\mathbb{R}$ Les nombres réels

Ces ensembles importants seront décrits plus loin.

Nous utiliserons aussi les intervalles :

- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (intervalle **fermé**)
- $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (intervalle **ouvert**)
- $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
- $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

1.2 Logique et abréviations

« non-A » Négation de A. Diverses notations sont utilisées, par exemple $\neg A$

« si A, alors B » Notation : $A \implies B$. A est l'hypothèse, B est la conclusion. On dit aussi que A est une condition suffisante pour B et que B est une condition nécessaire pour A.

A si et seulement si B Notation : $A \iff B$ ou A ssi B. $A \iff B$ est équivalent à dire que $A \implies B$ et $B \implies A$.

« $\forall A$ » « Pour tout A. » On écrit par exemple

$$\forall n \in \mathbb{Z}.\, n \text{ est pair ou impair}$$

pour dire qu'un nombre entier quelconque est soit pair, soit impair.

« $\exists A$ » « Il existe A ». On écrit par exemple

$$\exists n \in \mathbb{Z}.\, n \text{ est un nombre premier}$$

pour dire qu'il y a (au moins) un nombre entier qui est premier.

Notons que, donné par écrit, l'énoncé d'une implication n'est pas toujours exactement la forme « si ... alors ... ». Par exemple :

> « Un nombre entier est divisible par 2 s'il se termine pas par 0,2,4,6 ou 8 »

est le même énoncé que

> « S'il se termine pas par 0,2,4,6 ou 8, un nombre entier est divisible par 2. »

En utilisant le symbole $\implies$, cela revient à dire que

$$A \implies B \text{ et } B \impliedby A$$

sont équivalents.

La **contraposée** d'une implication $A \implies B$ est l'implication $\text{non} - B \implies \text{non} - A$. La contraposée est équivalente à l'implication originale.

Exemple 1.1. « Un nombre entier n'est pas divisible par 2 s'il ne se termine pas par 0,2,4,6 ou 8 »

est la contraposée de

> « Un nombre entier est divisible par 2 s'il se termine pas par 0,2,4,6 ou 8 »

Exemple 1.2. « Si un nombre est premier, alors il n'a pas de diviseurs autre que 1 et lui-même »

est la contraposée de

> « Si un nombre a d'autres diviseurs que 1 et lui-même alors il n'est pas premier.

Une **tautologie** est une affirmation qui est toujours vraie pour des raisons logiques. Par exemple :

$$A \implies A$$

$$A \text{ et } B \implies A$$

> « Si n est un nombre entier, alors n est pair ou n est impair »

Axiome Propriété qui est acceptée sans démonstration, considérée comme assez évidente pour être le fondement d'une théorie mathématique.

Théorème Résultat important, dont la validité est établie par une démonstration ou une preuve, et qui a une grande importance dans un domaine donné des mathématiques étant donné ses multiples conséquences. Abréviation en classe : « thm ».

Proposition Résultat important, dont la validité est établie par une démonstration ou une preuve. Abréviation en classe : « prop ».

Lemme Résultat servant à démontrer un ou plusieurs autres résultats.

Corrolaire Résultat qui est déduit facilement d'un résultat précédant, une conséquence immédiate d'un théorème ou d'une proposition.

Preuve (ou démonstration) Suite de déduction logiques dont la conclusion est un théorème, une proposition ou un lemme. Une preuve réponds à la question « pourquoi c'est vrai. « On indique habituellement la fin d'une preuve à l'aide de CQFD (« ce qu'il fallait démontrer »), QED (« *quod erat demonstrandum* », CQFD en latin) ou par un signe comme $\square$. Il existe plusieurs formes de preuve (directe, par induction, par contradiction) que nous verrons à l'œuvre au cours de la session.

Note importante : « démontrer » ne veut pas dire « donner un exemple ». Un cas particulier n'établit pas la vérité pour tous les cas. Cependant, un seul cas particulier peut réfuter une affirmation générale. On appelle un tel exemple un **contre exemple**.

Exemple 1.3. Le fait que

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

est un cas particulier qui ne démontre pas que

$$x^2 + y^2 = z^2$$

pour n'importe quel nombres x, y et z. Par exemple,

$$2^2 + 3^2 \neq 4^2.$$

Ce dernier exemple démontre cependant que

$$x^2 + y^2 = z^2$$

n'est pas toujours vrai !

Exemple 1.4. Démontrer à l'aide d'un contre-exemple qu'il n'est pas vrai que

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2$$

pour tout choix de nombres entier x, y et z.

On peut prendre le cas particulier $x = 2$ et $y = 3$.

$$(2+3)^2 = 25, \text{ mais } 2^2 + 3^2 = 13.$$

1.3 Ensembles de nombres

Nombres naturels

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Un principe important qui est souvent considéré comme une partie essentielle de la définition des nombres naturels :

Proposition 1.1 (principe d'induction)**.** Si (1) une proposition impliquant une variable n représentant un nombre entier est vraie pour le nombre naturel $n = 0$ et (2) lorsqu'elle est vraie pour $n > 0$ et ses prédécesseurs, alors elle l'est aussi pour $n+1$, alors la proposition est vraie pour tout n.

Nombres entiers

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Quelques concepts liés aux nombres naturels et aux nombres entiers.

Définition 1.1. n est un nombre pair s'il existe un nombre $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n = 2k.$$

Définition 1.2. n est un nombre impair s'il existe un nombre naturel $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n = 2k + 1.$$

Théorème 1.1 (fondamental de l'arithmétique)**.** Tout nombre entier n peut se factoriser de manière unique (à l'ordre des facteurs près) comme un produit de facteur premiers.

Nombres rationnels

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\}$$

Théorème 1.2. Un nombre réel a peut s'écrire comme une fraction si et seulement si son développement décimal est périodique.

Nombres réels

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ a un développement décimal quelconque, possiblement infini}\}$$

Les nombres peuvent être combinés à l'aide des opérations de base : addition, soustraction, multiplication, division, exposants et racines. Quand une expression combine plusieurs opérations, on doit les effectuer dans l'ordre conventionnel déterminé par la « priorité des opérations ».

On suppose que les opérations de base ont les propriétés vu au secondaire (voir formulaire d'algèbre) : associativité, distributivité, commutativité, etc.

Théorème 1.3. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Lemme 1.1.

$$n \text{ pair } \iff n^2 \text{ pair.}$$

Démonstration. ($\Longrightarrow$) Si n est pair, alors n est le double d'un certain nombre k. On peut donc écrire que $n = 2k$. Dans ce cas,

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2),$$

ce qui montre que n^2 est bien le double d'un nombre entier.

($\Longleftarrow$) On démontre la contraposée : si n est impair, alors n^2 est aussi impair. Supposons que n est impair ; il peut donc s'écrire comme $n = 2k+1$ pour un certain nombre k. Dans ce cas,

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$

ce qui établi que n^2 est impair. □

du théorème. Supposons que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel. Nous allons montrer que cette hypothèse mène à un résultat absurde et qu'elle ne peut pas être vraie, donc que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Si $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel, il existe deux entiers a et $b \neq 0$ tel que

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

Comme on peut toujours simplifier une faction, on peut simplifier $\frac{a}{b}$ pour obtenir une fraction simplifiée $\frac{m}{n}$. On a donc

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

où m et n n'ont aucuns facteurs communs.

En multipliant chaque membre de l'égalité $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ par n, on obtient

$$n\sqrt{2} = m.$$

En mettant au carré, on a que

$$n^2(2) = m^2$$

m^2 doit donc être pair. Par le lemme précédant, on a que m doit être pair lui aussi. m peut donc s'écrire comme $m = 2k$ pour un certain entier k. En remplaçant m par $2k$ dans l'égalité précédente

$$n\sqrt{2} = m,$$

on obtient que

$$n\sqrt{2} = 2k.$$

On met au carré pour obtenir

$$2n^2 = 4k.$$

En divisant par 2, on trouve

$$n^2 = 2k.$$

n^2 est donc pair, ce qui implique par le lemme précédant que n est pair lui aussi.

La fraction $\frac{m}{n}$ peut donc être simplifiée car le numérateur m et le dénominateurs n sont tous les deux pairs ! Cela contredit le fait que $\frac{m}{n}$ est une faction simplifiée. L'hypothèse « $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel » est donc fausse et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. $\square$

1.4 Algèbre

L'objectif principal de l'algèbre élémentaire est de déterminer une valeur inconnue dans une relation numérique. On peut poser ce genre de questions sous forme « écrite », par exemple

> (Problème vieux de quelques millénaires figurant sur la tablette cunéiforme AO 8862)
>
> J'ai multiplié longueur et largeur pour obtenir l'aire. J'ai additionné ce par quoi la longueur dépasse la largeur à l'aire et j'ai obtenu 183. La somme de la longueur et de la largeur est 27. Quelles sont la longueur, la largeur et l'aire ?

Les géomètres et mathématiciens ont développé au fil du temps différentes manière de représenter ce genre de problème afin de les résoudre plus facilement. La notation moderne, malgré le fait qu'elle exige plusieurs années d'entrainement, est de loin la plus efficace. Si x est la longueur et y la largeur, le problème se traduit en notation moderne comme

$$\begin{aligned} x - y + xy &= 183 \\ x + y &= 27 \end{aligned}$$

L'algébriste moderne applique ensuite quelques principes simples de manière astucieuse pour déterminer les valeurs inconnue. On peut même décrire la méthode de solution avec ces techniques : (1) exprimer y en fonction de x dans la seconde équation : $y = 27 - x$ (2) substituer la valeur trouvée dans la première équation $x - (27 - x) + x(27 - x) = 183$ (3) résoudre l'équation obtenue en regroupant : $-x^2 + 29x - 210 = 0$. On trouve deux solutions : $x = 14$ et $x = 15$, et donc les valeurs de y correspondantes : $y = 13$ et $y = 12$. L'aire correspondante est respectivement 182 et 180.

Si la solution de cet ancien problème vous semble complexe, en comparant avec une solution n'utilisant aucune des idées modernes comme des variables, la substitution, isoler, la formule quadratique, etc, la solution serait beaucoup plus complexe.

1.4.1 Principes généraux

Voici les principes les plus utilisés dans les raisonnements algébriques :

Une variable représentant un nombre inconnu d'un certain type (entier, rationnel, nombre réel) a les mêmes propriétés que les nombres du même type. On peut y appliquer les mêmes opérations.

(Transitivité de l'égalité) $A = B$ et $B = C$ alors $A = C$.

(Application d'une opération) Si $f(x)$ est une opération (fonction), on a que

$$A = B \implies f(A) = f(B).$$

Si f est une opération inversible, alors $A = B \iff f(A) = f(B)$.
Si $f^{-1}(x)$ est l'opération inverse de $f(x)$, alors

$$f(A) = B \iff A = f^{-1}(B).$$

(Substitution) si $A(x) = B(x)$ alors $A(C) = B(C)$, où C est une expression algébrique quelconque substituée à la place de la variable x.

Exemple 1.5. Par exemple, si on écrit

$$(x+2)^2 = (x+2)(x+2) = x(x+2)+2(x+2) = x^2+2x+2x+4 = x^2+4x+4.$$

On utilise (plusieurs fois) la *transitivité* pour conclure que

$$(x+2)^2 = x^2+4x+4.$$

Note : on écrit souvent verticalement une telle suite d'égalité quand elle est trop longue :

$$\begin{aligned}(x+2)^2 &= (x+2)(x+2)\\ &= x(x+2)+2(x+2)\\ &= x^2+2x+2x+4\\ &= x^2+4x+4.\end{aligned}$$

On utilise le principe de *substitution* quand on prend une identité algébrique simple pour en trouver une plus complexe.

Exemple 1.6. À partir de l'indentité générale pour les différences de carré

$$X^2 - Y^2 = (X-Y)(X+Y),$$

Cette identité est vraie peu importe les valeurs de X et Y. On peut déduite une nouvelle identité en substituant (par exemple) x^2 à X et $2x$ à Y :

$$(x^2)^2 - (2h)^2 = \big((x^2)-(2x)\big)\big((x^2)+(2x)\big),$$

Cette dernière égalité est donc déduite de la première à l'aide du principe de substitution.

En simplifiant l'identité obtenue, on obtient que

$$x^4 - 4h^2 = (x^2-2x)(x^2+2x)$$

L'application d'une même opération sur chaque membre d'une égalité est probablement le premier principe algébrique appris dans les cours d'algèbre élémentaire et est une généralisation du principe ayant donné son nom à l'algèbre.

Exemple 1.7. Si on a que $2x = 5$, on obtient que

$$\frac{2x}{2} = \frac{5}{2}$$

yy en applicant l'opération « diviser par deux » sur chaque membre de l'égalité initiale.

Comme « diviser par deux » est une opération inversible (dont l'inverse est « multiplier par deux », on peut écrire

$$2x = 5 \iff \frac{2x}{2} = \frac{5}{2}.$$

L'opération « mettre au carré » n'est pas inversible. Par exemple, si on met -2 au carré, on obtient 4. L'opération inverse est ambigüe : on pourra obtienir un carré de 4 à partir de 2 ou de -2.

Si on applique une opération non inversible, comme mettre au carré, on ne peut pas obtenir une équivalence entre les identités. Par exemple, l'implication

$$2x = 5 \implies 4x^2 = 25$$

est vraie, mais l'équivalence

$$2x = 5 \iff 4x^2 = 25$$

est fausse !

1.4.2 Propriétés algébriques utiles

Les identités algébriques suivantes sont très souvent utilisées.

$AB + AC = A(B + C)$ (mise en évidence simple)

$AC + AD + BC + BD = (A + B)(C + D)$ (mise en évidence double)

$\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$ (rationalisation)

$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ (différence de carrés)

$\left(\sqrt{A} \pm \sqrt{B}\right)\left(\sqrt{A} \mp \sqrt{B}\right) = A - B$ (conjugué)

$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$ (différence de cubes)

$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ (binôme carré parfait)

$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$ (développement du binôme degré 3)

$(A + B)^4 = A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4$ (développement du binôme degré 4)

1.4.3 Triangle de Pascal

Le triangle de Pascal est un truc permettant de déterminer rapidement les coefficients du développement d'un binôme de degré quelconque : si on développe une expression de la forme $(A+B)^n$, les coefficients du développement sont donnée par la n-ième ligne du triangle de Pascal.

Triangle de Pascal

$$\begin{array}{ll}
(A+B)^0 & 1 \\
(A+B)^1 & 1 \quad 1 \\
(A+B)^2 & 1 \quad 2 \quad 1 \\
(A+B)^3 & 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
(A+B)^4 & 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
(A+B)^5 & 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
(A+B)^6 & 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

Exemple 1.8. Le développement de $(x+2)^5$ a la forme suivante :

$$C_0x^5 + C_1x^42^1 + C_2x^32^2 + C_3x^22^3 + C_4x^12^4 + C_52^5$$

Les nombres C_0, C_1, ..., C_5 sont donnés par la ligne correspondant à $(A+B)^5$ du triangle de Pascal, soit

$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1.$$

On a donc que

$$(x+2)^5 = x^5 + 5x^42 + 10x^32^2 + 10x^22^3 + 5x2^4 + 2^5$$

1.4.4 Autres principes fréquemment utilisés pour résoudre des équations

(EQ1) $ABC = 0 \implies A = 0$ ou $B = 0$ ou $C = 0$

(EQ2) $\dfrac{A}{B} = 0 \iff A = 0$ et $B \neq 0$

(EQ3) $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D} \iff AD = BC$ et $B, D \neq 0$

Le premier de ces principes permet de résoudre des équations sous forme factorisée. Par exemple, si on a l'équation

$$(x-2)(x+1) = 0$$

On a une expression de la forme $AB = 0$. Il faut donc que $A = 0$ ou que $B = 0$. Dans ce cas particulier, il faut donc que

$$x-2 = 0 \text{ ou } x+1 = 0.$$

Cela implique que $x = 2$ ou $x = -1$.

Ce principe s'applique à un produit d'un nombre de facteur aussi grand que l'on veut : si un produit de facteurs est nul, un des facteurs doit être nul. Ainsi, les zéros de

$$(x-3)(x+\sqrt{33})(x-\log_2(3)) = 0$$

sont $x = 3$, $x = -\sqrt{33}$ et $x = \log_2(3)$.

La simplicité de la solution d'une équation factorisée est évidente si on la compare avec même équation non-factorisée :

$$x^3 - x^2\log_2(3) + \sqrt{33}x^2 - \sqrt{33}x\log_2(3) - 3x^2 + 3x\log_2(3) - 3\sqrt{33}x + 3\sqrt{33}\log_2(3) = 0.$$

C'est une des raisons principales pour lesquelles les techniques de factorisations de polynômes sont importante : elles permettent de prendre un équation polynômiale de degré élevé et de la transformer (en la factorisant) en plusieurs équations de degré moins élevée (donc plus faciles a résoudre).

Le second principe permet de résoudre facilement des expressions rationnelles factorisée :

$$\frac{(x-3)(x+1)}{x-6} = 0$$

a comme solution les zéros de $(x-3)(x+1)$, soit $x = 3$ et $x = -1$. Seul le numérateur détermine les zéros d'une expression de la forme A/B. Cependant, le dénominateur ne peut pas s'annuler car il ne peut par y avoir de division par zéro. Ainsi, dans une équation comme

$$\frac{(x-3)(x+1)}{x^2+2x+1} = 0$$

$x = 3$ et $x = -1$ sont les zéros du numérateur, mais $x = -1$ annule le dénominateur (ce qui cause une division par zéro !). La valeur $x = -1$ n'est donc par un zéro de l'équation.

1.4.5 Opérations inverses usuelles

En algèbre, on utilise souvent le « principe de la balance » : on peut faire la même opération de « chaque côté » d'une égalité. Les opérations inverses les plus souvent utilisée sont indiquées dans la liste suivante, avec les restrictions faisant en sorte que les opérations soient inversibles.

$A + C = B \iff A = B - C$

$CA = B \iff A = \frac{1}{C}B$ si $C \neq 0$.

$A^n = B \implies A = \pm\sqrt[n]{B}$ si n pair.

$A^n = B \iff A = \sqrt[n]{B}$ si n impair.

$b^A = B \iff \log_b(B) = A$ si $B > 0$.

$\sin(A) = B \iff A = \arcsin(B)$ si $-\frac{\pi}{2} \leq A \leq \frac{\pi}{2}$

$\cos(A) = B \iff A = \arccos(B)$ si $0 \leq A \leq \pi$

$\tan(A) = B \iff A = \arctan(B)$ si $-\frac{\pi}{2} < A < \frac{\pi}{2}$

1.4.6 Factorisation

Comme nous l'avons dit précédemment, la factorisation est une stratégie importante pour simplifier une équation afin de la résoudre.

Exemple 1.9. Considérons l'équation

$$x^2 - 4x - 5 = 0.$$

En factorisant le membre de gauche, on obtient

$$(x+1)(x-5) = 0.$$

Comme un produit de facteur est nul si un de ses facteur est nul, soit $(x+1) = 0$, soit $(x-5) = 0$. Les solutions sont donc $x = -1$ ou $x = 5$.

On voit dans cet exemple que chaque facteur de degré un, donc de la forme $x - a$, correspond à une solution de l'équation originale. Il y a en fait une correspondance entre les facteurs de degré 1 et les zéro : si $x = a$ est un zéro d'une équation polynômiale $P(x) = 0$, alors $(x - a)$ est un facteur de $P(x)$.

Le résultat suivant dit que chaque zéro d'un polynôme est lié à un « facteur coupable » lui correspondant et réciproquement.

Théorème 1.4 (Factorisation)**.** Si $P(x)$ est un polynôme quelconque, alors a est un zéro de $P(x)$ si et seulement si $(x - a)$ est un facteur de $P(x)$.

Autrement dit :

$$P(a) = 0 \iff P(x) = (x-a)Q(x).$$

Sous forme de slogan :

« zéro si et seulement si facteur (de degré 1). »

Exemple 1.10. Si $P(x) = x^2 - x - 2$, on a que

$$P(2) = 2^2 - 2 - 2 = 0.$$

La valeur $a = 2$ est donc un zéro de $P(x)$. Le théorème de factorisation dit que $P(x)$ doit avoir $(x-2)$ (c'est à dire le facteur (x-le zéro)) comme facteur. Si on divise $P(x) = x^2 - x - 2$ par $(x-2)$, on trouve que

$$P(x) = (x-2)(x+1),$$

ce qui est est bien de la forme donnée par le théorème :

$$P(x) = (x-a)Q(x).$$

Exemple 1.11. La valeur $x = 1$ est un zéro de $x^3 - 1$. On sait donc par le théorème de factorisation que $x^3 - 1 = (x-1)Q(x)$, où $Q(x)$ est un polynôme à déterminer. On peut toujours déterminer $Q(x)$ en divisant :

$$Q(x) = \frac{x^3 - 1}{(x-1)}.$$

En divisant, trouve que $Q(x) = x^2 + x + 1$, et donc

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1).$$

Démonstration. ($\Longrightarrow$) Supposons que $P(a) = 0$. On peut diviser $P(x)$ par $(x-a)$ pour obtenir un expression de la forme

$$P(x) = (x-a)Q(x) + R(x),$$

où $R(x)$ est le reste de la division et $Q(x)$ le quotient.

Le degré de $R(x)$ doit être zéro car on divise par le polynôme $(x-a)$ qui est de degré 1. (Le degré du reste est toujours strictement inférieur au degré du polynôme par lequel on divise.) Comme un polynôme de degré 0 est en fait une constante $R \in \mathbb{R}$, en divisant on a donc réécrit $P(x)$ comme suit :

$$P(x) = (x-a)Q(x) + R$$

Si on évalue chaque membre de cette dernière égalité en a, on obtient

$$P(a) = (a-a)Q(a) + R$$

Par hypothèse, $P(a) = 0$. De plus, le facteur $a - a$ est toujours nul. On a donc

$$0 = 0 + R.$$

La seule valeur de R satisfaisant cette équation est zéro. On a donc établit que

$$P(x) = (x-a)Q(x) + 0 = (x-a)Q(x),$$

c'est à dire que $(x-a)$ est un facteur de $P(x)$.

($\Longleftarrow$) Pour démontrer la réciproque, on fait l'hypothèque que $(x-a)$ est un facteur de $P(x)$. Dans ce cas, on peut écrire $P(x)$ comme un produit de facteur de la forme

$$P(x) = (x-a)Q(x)$$

où $Q(x)$ est le quotient de la division de $P(x)$ par $(x-a)$.

On veut montrer que $P(a) = 0$. Il suffit d'évaluer la forme factorisée :

$$P(a) = (a-a)Q(a) = (0)Q(a) = 0.$$

□

On peut conclure du théorème de factorisation que pour un polynôme $P(x)$,

$$P(x) \text{ n'a pas de zéro} \iff P(x) \text{ n'a pas de facteur de la forme } (x-a).$$

Théorème 1.5. Les polynômes réels irréductibles sont de l'une des deux formes suivantes :

- degré 1 de la forme $c(x-a)$ (a est nécessairement un zéro)
- degré 2 de la forme ax^2+bx+c, où $b^2-4ac<0$. (polynôme de degré deux sans zéros).

Théorème 1.6 (Théorème fondamental de l'algèbre)**.** Tout polynôme réel peut s'écrire comme un produit d'une constante réelle et de polynômes irréductibles, produit unique à l'ordre des facteurs près.

1.5 Fonction, graphe et domaine

Définition 1.3. Une **fonction** $f\colon A \to B$ allant d'un ensemble A à un autre ensemble B est une règle quelconque associant à des éléments a de l'ensemble A un unique élément b de l'ensemble B.

On dénote $f(a)$ l'élément de l'ensemble B associé à a.

Définition 1.4. Le **domaine** d'une fonction $f\colon A \to B$ est l'ensemble des éléments de A où $f(a)$ est défini. Notation :

$$\operatorname{dom}(f) = \{a \mid f(a) \text{ est défini}\}.$$

Les fonctions qui seront étudiée dans ce cours sont des **fonctions réelles** $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

On détermine le domaine d'une fonction réelle définie à l'aide des opérations dites « élémentaires » en utilisant les principes suivants.

$\cancel{(\div 0)}$ Il ne peut y avoir de division par zéro.

$$\frac{A}{B} \text{ est défini} \iff B \neq 0$$

$\cancel{\left(\sqrt{<0}\right)}$ Il ne peut y avoir de racine paire de nombre négatifs.

$$\sqrt{A} \text{ est défini} \iff A \geq 0$$

$\cancel{\left(\log_b(\leq 0)\right)}$ Le logarithme d'un nombre négatif ou nul n'est pas défini (peu importe la base)

$$\log_b(A) \text{ est défini} \iff A > 0$$

On détermine le domaine d'une fonction définie par composition de plusieurs fonction élémentaires en vérifiant que chacune des opérations utilisée est définie.

1.5.1 Définition d'une fonction

On peut définir une fonction f de plusieurs manières.

On peut le faire en donnant explicitement une expression algébrique pour déterminer $f(x)$ à partir de la valeur de x, par exemple

$$f(x) = x^2.$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} x \mapsto x^2$$

On peut aussi définir une fonction *implicitement* à l'aide d'une égalité algébrique, par exemple :

$$y = x^2$$

$$x^2 - y = 0$$

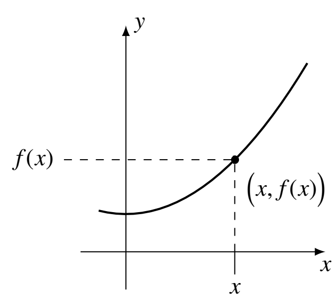
Dans ce cas, il faut spécifier quelle variable est déterminée en fonction de l'autre variable. La variable « entrée » est appelée **variable indépendante** et la « sortie » est appelé variable dépendante — elle dépend de la valeur de la variable indépendante.

Un définition implicite ne définit pas toujours une fonction : il arrive qu'une valeur donnée de la variable indépendante corresponde à plusieurs valeurs de la variable dépendante. Par exemple

$$y^2 = x$$

ne définie par une fonction si on considère y comme variable dépendante. En effet, pour $x = 1$, les valeurs $y = 1$ et $y = -1$ satisfont toutes deux l'équation donnée. Il n'y a donc pas une valeur unique de y associée à la valeur $x = 1$. Cette relation ne défini pas une fonction.

Graphe d'une relation ou d'une fonction Le graphe d'une fonction f est l'ensemble des « points » $(x, f(x))$. Dans le cas des fonctions réelles, ces points peuvent être placés dans le plan cartésien pour obtenir une représentation graphique de f. Par exemple, si $f(x) = x^2$, on obtient



On peut trouver un point sur le graphe d'une relation en donnant une valeur à une variable et en isolant pour trouver la valeur de l'autre variable.

Exemple 1.12. Trouvons un point sur le graphe de la relation

$$2x^2 + 3y^2 = 1.$$

Si on prend $x = 0$, on obtient

$$2(0)^2 + 3y^2 = 1.$$

En simplifiant

$$3y^2 = 1.$$

On isole y :

$$y^2 = \frac{1}{3}.$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Il y a donc deux points correspondant à $x = 0$ sur le graphe de la relation donnée :

$$\left(0, 1/\sqrt{3}\right) \text{ et } \left(0, -1/\sqrt{3}\right).$$

Chapitre 2

Taux de variation, différentielles et dérivées

2.1 Taux de variation moyen

Définition 2.1. Soit f une fonction réelle. Si x varie de a à b, on note par Δx la grandeur de cette variation :

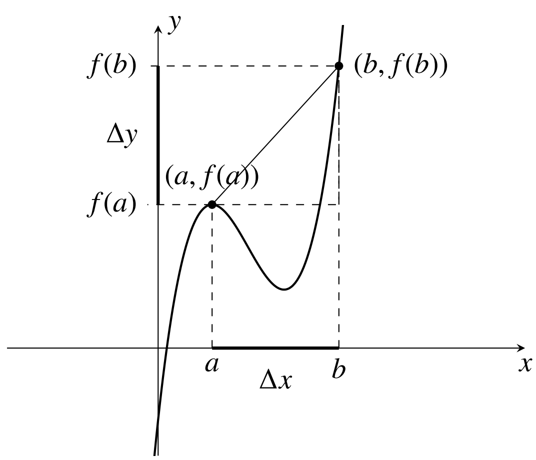
$$\Delta x = b - a$$

La variation en y d'une fonction $y = f(x)$ sur un intervalle $[a,b]$ est donnée par

$$\Delta y = f(b) - f(a).$$

Si on connait a et Δx plutôt que a et b, comme $b = a + \Delta x$, on peut calculer la variation en y comme ceci :

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a).$$



Définition 2.2.

Le taux de variation moyen de $y = f(x)$ pour x allant de $x = a$ jusqu'à $b = a + \Delta x$

est défini par

$$\mathrm{TVM}_{[a,a+\Delta x]} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}.$$

Définition 2.3. Le **taux de variation moyen** (TVM) d'une fonction f sur un intervalle $[a,b]$ est défini par

$$\mathrm{TVM}_{[a,b]}(f) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Le TVM est le changement moyen de la valeur de la fonction f quand son argument passe de a à b (ou de a à $a+\Delta x$).

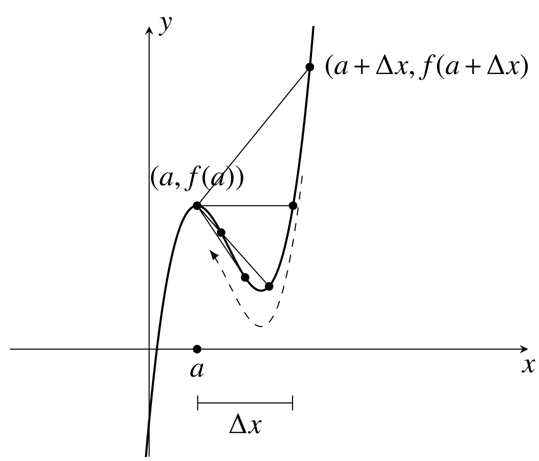
Dans le cas où la fonction donne une distance parcourue en fonction du temps (que nous dénoterons par $x(t)$, alors le TVM est la **vitesse moyenne** sur le parcours entre $t=a$ et $t=b$.

$$\text{Vitesse moyenne entre } t=a \text{ et } t=b \text{ est } \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

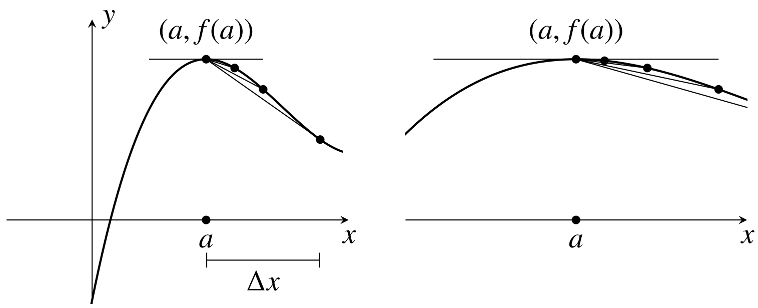
2.2 Taux de variation instantané

Le **taux de variation instantané** (TVI) de la fonction f en $x=a$ est le taux de variation obtenu à partir du taux de variation moyen quand Δx devient très petit (ont dit que Δx est « **infinitésimal**. »). Le taux de variation instantané représente le taux de changement de la fonction f à un point donné.

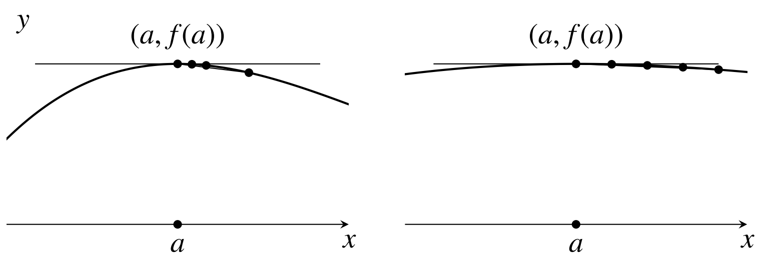
$$\mathrm{TVI}_a(f) = \frac{dy}{dx} \overset{\text{def}}{=} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} \text{où } \Delta x \text{ très petit}$$



En se rapprochant du point $(a, f(a))$, on voit que quand Δx devient de plus en plus petit, les sécantes se rapprochent de plus en plus de la tengente au graphe au point $(a, f(a))$.



Ultimement (c'est à dire quand Δx devient « infiniment petit »), les segments sécants et la courbe elle même se confondent.

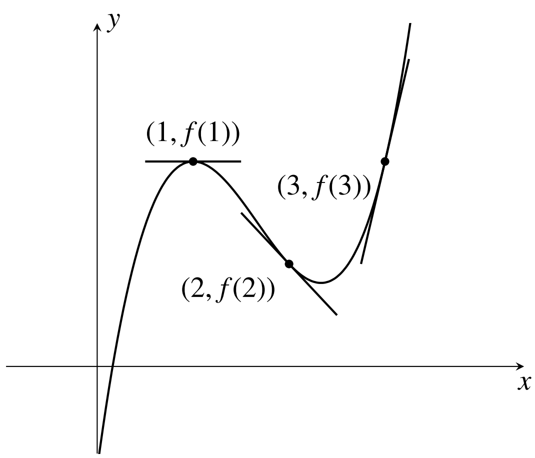


Définition 2.4. Le taux de variation instantané de la fonction $y = f(x)$ en $x = a$ est la pente de la tangente au point $(a, f(a))$ au graphe de $f(x)$ (si cette tangente existe).

Si $y = f(x)$, on note le taux de variation instantané en $x = a$ par

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} \text{ ou } \mathrm{TVI}_a(f)$$

Il varie donc d'un point à l'autre du graphe d'une fonction, comme on peut le voir dans le graphe suivant.



On peut aussi remarquer dans ce dernier exemple que la pente de la tangente est liée à la croissance de la fonction : elle est positive là où la fonction est croissante, négative là où la fonction est décroissante. Elle est nulle (tangente horizontale) quand il y a un maximum (ou un minimum).

Un exemple qui permet de se faire une intuition de la signification de ce concepts est la vitesse : la vitesse moyenne dans un parcours est le rapport de la distance parcourue Δx sur le temps de parcours Δt. La vitesse instantanée est la vitesse à un instant donnée (celle des indicateurs de vitesse dans les voitures !).

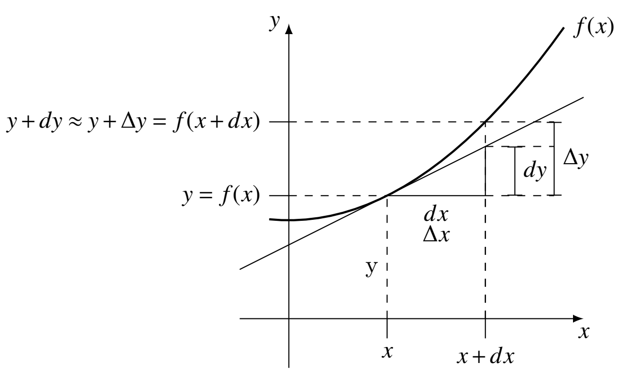
$$\text{Vitesse moyenne} = \frac{\Delta x}{\Delta y} \qquad \text{Vitesse instantanée} = \frac{dx}{dt}$$

2.3 Différentielles

On vient de définir le taux de variation instantané en $x = a$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$$

comme étant la pente de la tangente au point $(a, f(a))$. Voyons comment on peut calculer ce taux pour une fonction $y = f(x)$.



Quand Δx est très petit, on peut approximer l'accroissement Δy sur le graphe de la fonction par l'accroissement dy sur la droite tangente. Comme la pente de la tangente est $\frac{dy}{dx}$, si Δx est petit on a que

$$\Delta y \approx dy,$$

c'est à dire que

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx \frac{dy}{dx} dx.$$

Définition 2.5. Si y est une fonction de x, $y = f(x)$, alors la différentielle en y est

$$dy \stackrel{\text{def}}{=} f(x + dx) - f(x)$$

quand dx est très petit.

Définition 2.6. Le taux de variation instantanné de la fonction $y = f(x)$ en $x = a$ est

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(a+dx)-f(a)}{dx}$$

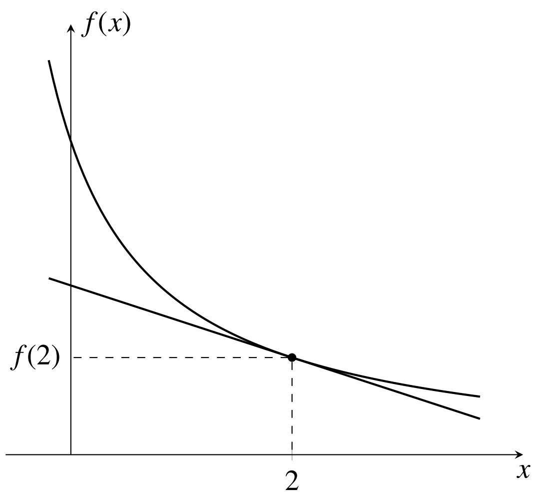
Pour calculer la pente de la tangente à partir de la définition de TVI, nous devons

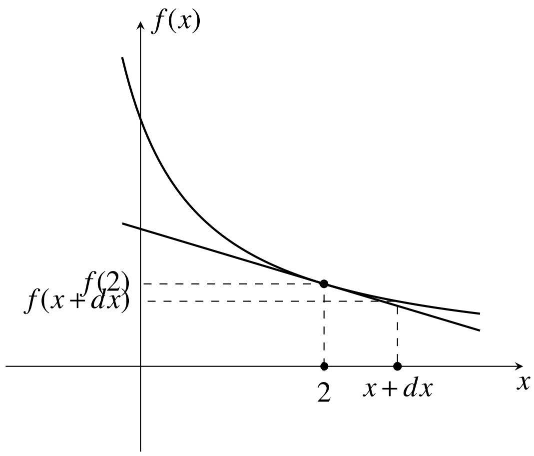
1. Écrire la définition de $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$ et évaluer correctement $f(a+dx)$. Faire une esquisse peut aider à se souvenir de la définition !
2. Manipuler algébriquement l'expression obtenue jusqu'à ce qu'on réussisse à simplifier le dénominateur dx.
3. Négliger toutes les occurrences de dx restante dans l'expression obtenue avec la dernière simplification.

Exemple 2.1. Calculons la pente de la tangente à la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

en $x = 2$ et donnons l'équation de la droite tangente en $x = 2$.





$$\begin{aligned}
\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(2+dx)-f(2)}{dx} \\
&= \frac{\frac{1}{(2+dx)+1}-\frac{1}{2+1}}{dx} \\
&= \frac{\frac{1}{3+dx}-\frac{1}{3}}{dx} \\
&= \frac{\frac{3}{3(3+dx)}-\frac{3+dx}{3(3+dx)}}{dx} \\
&= \frac{\frac{3-(3+dx)}{3(3+dx)}}{dx} \\
&= \frac{\frac{-dx}{3(3+dx)}}{dx} \\
&= \frac{-dx}{3(3+dx)dx} \\
&= \frac{-1}{3(3+dx)} \\
&\approx -\frac{1}{9}
\end{aligned}$$

La droite tangente en $x=2$ est donc de pense $-\frac{1}{9}$. Son équation est de la forme

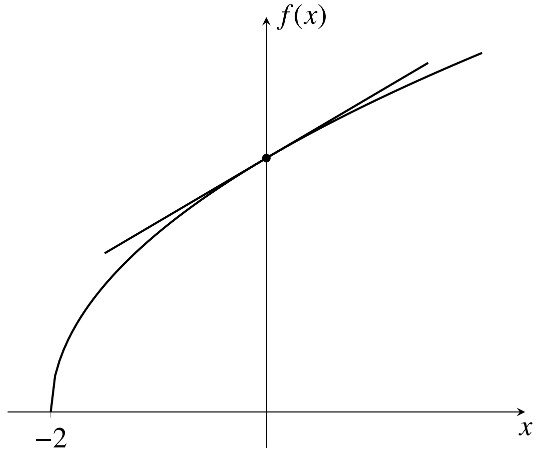
$$y = -\frac{x}{9}+b.$$

Pour déterminer b on prend un point sur la droite. On sait que la droite est tangente au point $(2, f(2)$, c'est à dire au point $(2, \frac{1}{3})$. On doit donc avoir

$$\frac{1}{3} = -\frac{2}{9}+b.$$

En isolant, on trouve que
$$b = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}.$$
L'équation de la tangente est donc
$$y = -\frac{x}{9} + \frac{5}{9}.$$

Exemple 2.2. Calculons la pente de la tangente à la fonction définie par
$$f(x) = \sqrt{x+2}$$
en $x = 0$ et donnons l'équation de la droite tangente en $x = 0$.



$$
\begin{aligned}
\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(0+dx)-f(0)}{dx} \\
&= \frac{\sqrt{0+dx+2}-\sqrt{0+2}}{dx} \\
&= \frac{\sqrt{dx+2}-\sqrt{2}}{dx} \\
&= \frac{\sqrt{dx+2}-\sqrt{2}}{dx}\,\frac{\sqrt{dx+2}+\sqrt{2}}{\sqrt{dx+2}+\sqrt{2}} \\
&= \frac{(dx+2)-2}{dx}\,\frac{1}{\sqrt{dx+2}+\sqrt{2}} \\
&= \frac{dx}{dx}\,\frac{1}{\sqrt{dx+2}+\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{dx+2}+\sqrt{2}} \\
&\approx \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

La droite tangente en $x=0$ est donc de pente $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Son équation est de la forme

$$y = \frac{x}{2\sqrt{2}} + b.$$

Pour déterminer b on prend un point sur la droite. On sait que la droite est tangente au point $(0, f(0)$, c'est à dire au point $(0, \sqrt{2})$. On doit donc avoir

$$\sqrt{2} = 0 + b.$$

En isolant, on trouve que

$$b = \sqrt{2}.$$

L'équation de la tangente est donc

$$y = \frac{x}{2\sqrt{2}} + \sqrt{2}.$$

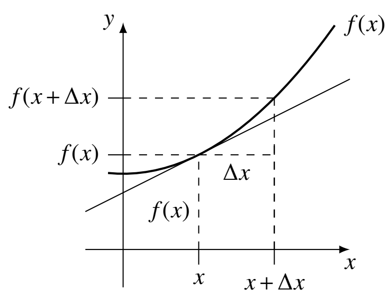
Pour déterminer la pente de la tangente à l'aide de la définition en terme de différentielles,

2.4 Dérivée

Comme la pente de la tangente au graphe d'une fonction f donne beaucoup d'information sur le comportement de la fonction et qu'elle varie d'un point à l'autre, il est utile de la considérer comme une nouvelle fonction *dérivée* de la fonction initiale. Cette fonction dérivée associe à chaque valeur de x dans le domaine de f la pente de la tangente au graphe de f au point $\big(x, f(x)\big)$.

Définition 2.7. La **fonction dérivée** f' d'une fonction $y = f(x)$ est définie par

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \mathrm{TVI}_x(f).$$



On détermine la fonction dérivée de la même manière que la dérivée en un point, mais en laissant la coordonnée en x indéterminée.

Exemple 2.3. Si $f(x) = x^3$, alors

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} \\ &= \frac{(x+dx)^3 - x^3}{dx} \\ &= \frac{(x^3 + 3x^2dx + 3xdx^2 + dx^3) - x^3}{dx} \\ &= \frac{3x^2dx + 3xdx^2 + dx^3}{dx} \\ &= \frac{dx(3x^2 + 3xdx + dx^2}{dx} \\ &= 3x^2 + 3xdx + dx^2 \\ &\approx 3x^2\end{aligned}$$

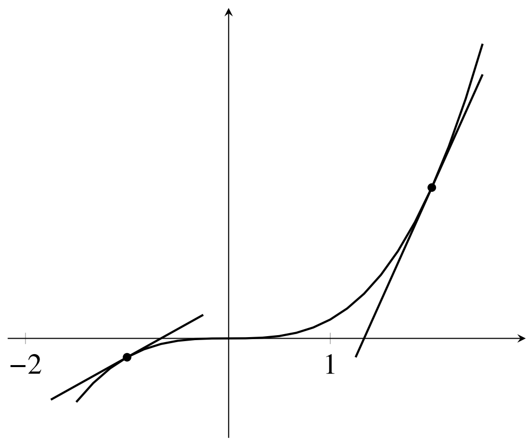
On a donc que la dérivée est $f'(x) = 3x^2$.

À l'aide de la fonction dérivée, on peut par exemple déterminer la pente de la tangente à f en un point quelconque $(x, f(x))$ du graphe de f en évaluant $f'(x)$. Par exemple, si $x = 2$, la pente de la tangente est

$$f'(2) = 3(2)^2 = 24.$$

Si $x = -1$, la pente de la tangente est

$$f'(-1) = 3(-1)^2 = 3.$$



On peut aussi chercher les valeurs de x où la pente a une valeur spécifique. Par exemple, sachant que $y' = 3x^2$ quand $y = x^3$, on peut trouver où la tangente est horizontale en posant que la dérivée (qui est la pente de la tangent) est nulle. Dans le dernier exemple, cela est le cas quand

$$y' = 0 \iff 3x^2 = 0 \iff x = 0.$$

Exemple 2.4. Si $f(x) = \sqrt{x+1}$, la dérivée y' est

$$
\begin{aligned}
f'(x) &\overset{\text{def}}{=} \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} \\
&= \frac{\sqrt{(x+dx)x+1}-\sqrt{x+1}}{dx} \\
&= \frac{\sqrt{x+dx+1}-\sqrt{x+1}}{dx}\frac{\sqrt{x+dx+1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+dx+1}-\sqrt{x+1}} \\
&= \frac{(x+dx+1)-(x+1)}{dx}\frac{1}{\sqrt{x+dx+1}+\sqrt{x+1}} \\
&= \frac{dx}{dx}\frac{1}{\sqrt{x+dx+1}+\sqrt{x+1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x+dx+1}+\sqrt{x+1}} \\
&\approx \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x+1}}
\end{aligned}
$$

La dérivée de $\sqrt{x+1}$ est donc $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$.

La fonction dérivée f' est la fonction qui associe à chaque valeur de x le taux de variation instantané de f en x, soit la pente de la tangente en $\big(x, f(x)\big)$:

$$f'(x) = \mathrm{TVI}_x(f) = \frac{dy}{dx}$$

Les notation $f'(x)$ et $\mathrm{TVI}_x(f)$ sont donc interchangeables. Cependant, la notation $f'(x)$ met l'accent sur le fait que la nouvelle fonction f' est déterminée à partir de la fonction originale f. Cette fonction est le plus souvent appelée simplement *la dérivée de f*.

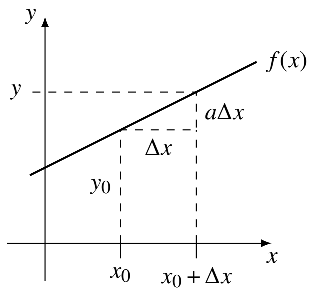
L'opération « ' » (dérivée) est en fait elle même une sorte de fonction, mais qui prend une fonction comme argument et qui donne une nouvelle fonction :

$$\text{dérivée} : \text{fonctions réelles} \to \text{fonctions réelles.}$$

La dérivée est une « fonction de fonction ».

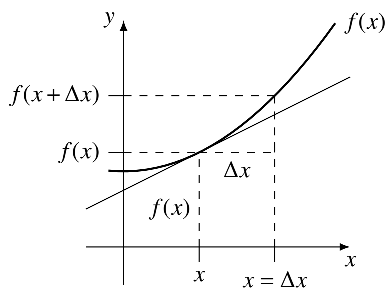
2.5 Droite tangente et approximation d'une fonction

Si une droite est de pente a, une augmentation de Δx de la valeur de x augmentera la valeur de y de $a\Delta x$.



On a donc que $y = y_0 + a\Delta x$.

On peut se servir de cette relation pour obtenir une approximation linéaire à l'aide de l'équation de la droite tangente.



Dans ce dernier graphique, la pente de la tangente au point $\big(x, f(x)\big)$ est, par définition, la valeur $f'(x)$ de la dérivée évaluée en x. En remplacent les paramètres de la relation $y = y_0 + a\Delta x$ par ceux de la droite tangente du dernier graphique, l'équation de la droite tangente en $(x, f(x))$ (où y est fonction de Δx) est

$$y = f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Si on considère que y sur la droite tangente est une bonne approximation de y sur le graphe de la fonction f, on peut faire l'approximation suivante de $f(x+\Delta x)$

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Exemple 2.5. On a vu précédement que la dérivée de $f(x) = x^3$ est $f'(x) = 3x^2$.

Cela nous donne les approximations suivantes par des droites, respectivement valables pour des valeurs de x près de 2 et -1.

$$f(x) \approx f(2) + f'(2)(x-2) = 8 + 12(x-2) = 12x - 16$$

$$f(x) \approx f(-1) + f'(-1)(x-(-1)) = -1 + 3(x+1) = 3x + 2$$

2.6 Notations

La dérivée est un concept très important en mathématiques. Les concepts importants ont souvent été étudiés par plusieurs mathématiciens et parfois plusieurs notations sont inventées et utilisées.

Si $y = f(x) = x^2$, toutes ces notations désignent la même chose :

$$f'(x) = \mathrm{TVI}_x(f) = \frac{dy}{dx} = \frac{dx^2}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = (x^2)'.$$

Notation différentielle avec $y = f(x) = x^2$:

$$dy = y'\,dx = f'(x)\,dx = 2x\,dx.$$

La dérivée a été étudiée de manière détaillée pour la première fois par Newton et Leibniz, de manière indépendantes et simultanée. Nous utilisons encore aujourd'hui les notations différentes inventées et utilisées par Newton ($\dot{y}$) et Leibniz ($\frac{dy}{dx}$), mais aussi celles introduites plus tard par d'autres mathématiciens ayant développé la théorie des dérivées, notamment celle d'Euler ($f'(x)$).

Voici les différentes notations pour la dérivée de $y = f(x) = x^2$.

Notations pour la dérivée					
$f'(x)$	y'	$\left(x^2\right)'$	$\dfrac{dy}{dx}$	$\dfrac{df(x)}{dx}$	$\dfrac{dx^2}{dx}$
$f'(a)$	$y'\big\rvert_{x=a}$	$\left(x^2\right)'\Big\rvert_{x=a}$	$\dfrac{dy}{dx}\Big\rvert_{x=a}$	$\dfrac{df(x)}{dx}\Big\rvert_{x=a}$	$\dfrac{dx^2}{dx}\Big\rvert_{x=a}$

La notation « $\dfrac{dy}{dx}$ » est celle introduite par Leibniz. Les notations de Newton ne sont plus aussi utilisées que celles de Leibniz. Newton écrivait $\dot{x}$ là où Leibniz écrivait $\frac{dx}{dy}$.

On peut penser à la notation $\dfrac{dy}{dx}$ comme une forme de $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ avec Δx « infiniment petit ».

La notation « barre » veut dire « évalué en $x = \ldots$ ». Elle peut s'utiliser dans différents contextes autre que celui du calcul de dérivées. Par exemple, on peut écrire

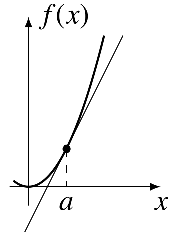
$$x^2\Big\rvert_{x=3} = 9.$$

Cette notation est utilisée dans plusieurs contextes en calcul différentiel et intégral. Dans ce cours, elle servira le plus souvent à évaluer la dérivée en un point, comme dans la seconde ligne du tableau précédant.

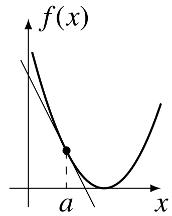
2.7 Graphique des fonctions dérivées

On peut faire le lien entre le graphe d'une fonction f et celui de sa dérivée f' à l'aide des observations suivantes, que nous motivons géométriquement pour le moment :

- Si $f'(a) > 0$, alors f est croissante en $x = a$.

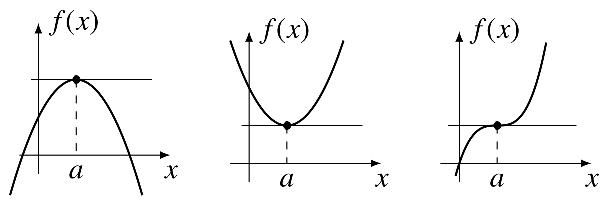


- Si $f'(a) < 0$, alors f est décroissante en $x = a$.



- Si $f'(a) = 0$, alors le graphe de $f(x)$ a un point où la tangente est horizontale (de pente zéro) : un minimum, un maximum ou un point « stationnaire ».

Maximum Minimum Stationnaire

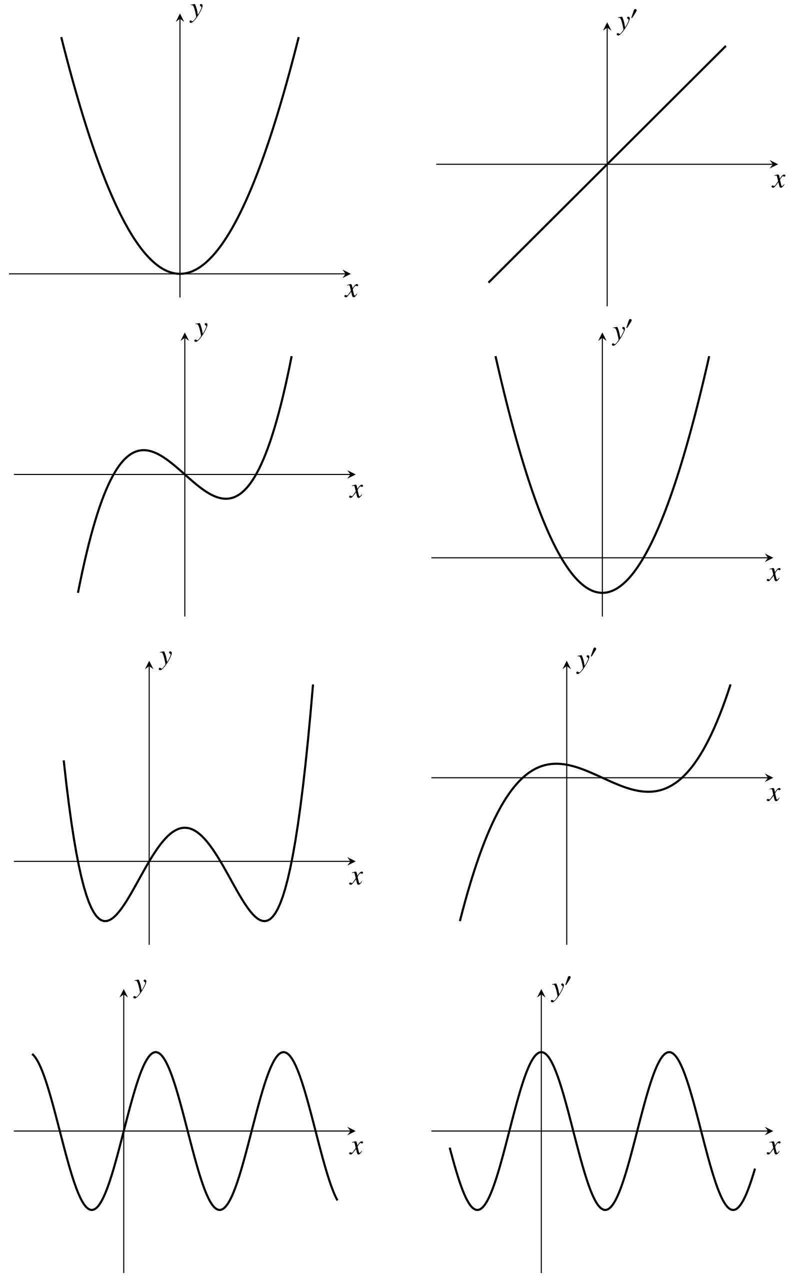


Comme à un sommet (minimum ou maximum) du graphe d'une fonction, la dérivée s'annule car la tangente est horizontale (donc de pente 0), on peut trouver les sommet d'une fonction en cherchant les valeurs a où

$$f'(a) = 0.$$

2.8 Exemples de fonctions avec leurs dérivées

Les fonctions sont à gauches, leurs dérivées à droite.



Chapitre 4

Propriétés de la dérivée

Le calcul de la fonction dérivée à l'aide de la définition donnée au chapitre précédent est laborieuse, même pour des fonctions définie par des expressions algébriques simples. Heureusement, il est possible « d'algébriser » le calcul de la dérivée. On démontrera dans ce chapitre un certain nombre de propriétés de la dérivée qui, prise ensemble, permettent de déterminer la dérivée d'une fonction en appliquant des « formules de dérivation « (ou « règles de dérivation ».

Ces propriétés ont été découvertes au fil du temps par plusieurs mathématiciens qui travaillaient sur différents problèmes allant du calcul d'aires délimitées par des courbes algébriques à la détermination de minimums et maximums liés à des problèmes de géométrie. C'est à Newton et Leibniz que l'on doit d'avoir su les présenter de manière systématique pour la première fois et d'avoir établit le lien entre le calcul d'aire et la dérivée.

Dans ce qui suit, nous chercherons à établir un certain nombre de propriétés algébriques de la dérivée qui peuvent servir à la détermination des fonctions dérivées sans utiliser la défition donnée au dernier chapitre, mais plutôt en la calculant directement à partir de l'expression algébrique définissant la fonction à dériver.

Preuves graphique

Pour simplifier, nous utiliserons parfois des preuves graphique comme démonstration de certaines propriétés de la dérivée. Pour donner un avant-goût de ce genre d'argument, voici une preuve algébrique et une preuve graphique du fait que la dérivée de la fonction $y = x^2$ est $y' = 2x$.

Proposition 4.1.

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\right) = 2x$$

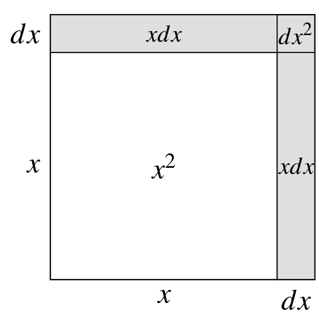
preuve algébrique.

$$\begin{aligned}
\frac{d\left(x^2\right)}{dx} &= \frac{(x+dx)^2 - x^2}{dx} \\
&= \frac{(x^2+2xdx+dx^2)-x^2}{dx} \\
&= \frac{2xdx+dx^2}{dx} \\
&= \frac{dx(2x+dx)}{dx} \\
&= 2x+dx \\
&\approx 2x \qquad \text{car } dx^2 \text{ très petit quand } dx \text{ est petit}
\end{aligned}$$

□

On peut généralement obtenir géométriquement l'expression de dy à partir de relations géométriques. Cette manière de faire est fréquente en physique. Elle permet aussi de mieux comprendre pourquoi certaines quantités peuvent être négligées.

version géométrique. La différentielle dy est l'aire de la région en gris dans le graphique suivant : c'est l'écart entre un carré de côté x et un carré de côté $x+dx$. Quand dx est très petit, l'aide du petit carré dx^2 est négligée.



□

Proposition 4.2. La dérivée de la fonction racine carrée est

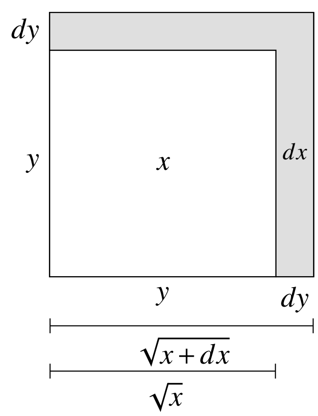
$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\frac{d\left(\sqrt{x}\right)}{dx} &= \frac{\sqrt{x+dx}-\sqrt{x}}{dx} \\
&= \frac{\sqrt{x+dx}-\sqrt{x}}{dx}\frac{\sqrt{x+dx}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+dx}+\sqrt{x}} \\
&= \frac{(x+dx)-x}{dx(\sqrt{x+dx}+\sqrt{x})} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x+dx}+\sqrt{x}} \\
&\approx \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

car $\sqrt{x+dx} \approx \sqrt{x}$ si dx très petit.

Preuve graphique : si x est l'aire d'un carré, alors le côté est $y = \sqrt{x}$. Si l'aire du carré change de x à $x+dx$, alors la variation approximative dy du côté du carré est approximativement $dy = \sqrt{x+dx} - \sqrt{x}$.



D'après la figure, l'aire dx (en gris) peut s'écrire comme

$$dx = ydy + ydy + dy^2.$$

Si on néglige dy^2, on trouve

$$dx = 2ydy,$$

donc, en isolant,

$$dy = \frac{1}{2y}dx.$$

Enfin, comme $y = \sqrt{x}$, on doit avoir que

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx. \qquad \square$$

Proposition 4.3. Si $y = \frac{1}{x}$, alors

$$dy = -\frac{1}{x^2}dx.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{1}{x+dx} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{x-(x+dx)}{x(x+dx)} \\ &= \frac{-1}{x^2+xdx}dx \\ &\approx \frac{-1}{x^2}dx \qquad \text{car } x^2+xdx \approx x^2. \end{aligned}$$

□

4.1 Linéarité et dérivée de puissances

Pour alléger, à partir de ce point nous utiliserons souvent la notation « $(y)'$ pour désigner la dérivée de y. Par exemple, on écrit directement

$$\left(x^2\right)' = 2x$$

plutôt que

$$y = x^2$$

dy$\overline{dx{=}2x.}$

Comme une fonction constante a comme graphe une droite de pente 0, la tangente à cette droite en n'importe quel point est aussi une droite de pente nulle.

Proposition 4.4 (Dérivée d'une constante)**.** Si $y = C$, où C est une constante réelle quelconque, alors

$$\frac{d}{dx}\left(C\right) = 0$$

Exemple 4.1.

$$(2)' = 0 \qquad (-3)' = 0 \qquad (0)' = 0 \qquad (\pi)' = 0$$

Démonstration. Comme $y = C$ peut importe la valeur de x, on a que

$$\frac{d}{dx}\left(C\right) = \frac{C-C}{dx} = 0$$

□

Proposition 4.5. Si $y = x$, alors

$$\frac{dy}{dx} = 1$$

Démonstration.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(0+dx)-0}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1 \qquad \square$$

Proposition 4.6 (linéarité 1 – dérivée d'un multiple d'une fonction)**.** Si $y = Cu$, où $u = f(x)$ est une fonction de x, alors

$$\frac{d}{dx}\Big(Cu\Big) = C\frac{du}{dx}$$

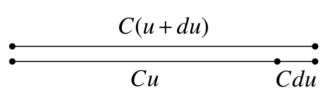
Exemple 4.2.

$$\Big(3x^5\Big)' = 3\Big(x^5\Big)' \qquad \left(\frac{x^3}{5}\right)' = \frac{1}{5}\Big(x^3\Big)' \qquad \Big(10\sin(x)\Big)' = 10\Big(\sin(x)\Big)'.$$

Démonstration. Preuve algébrique directe :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\Big(Cu\Big) &= \frac{C(u+du)-Cu}{dx} \\
&= \frac{Cu+Cdu-Cu}{dx} \\
&= \frac{Cdu}{dx} \\
&= C\frac{du}{dx}
\end{aligned}$$

Preuve graphique :



$\square$

Proposition 4.7 (Linéarité 2 : additivité)**.** Si u et v sont toutes deux des fonctions d'une même variable, alors

$$\frac{d\Big(u+v\Big)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

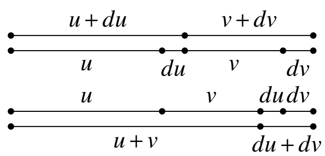
Démonstration.

$$\begin{aligned}\frac{d\big(u+v\big)}{dx} &= \frac{\big((u+du)+(v+dv)\big)-(u+v)}{dx}\\ &= \frac{du+dv}{dx}\\ &= \frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}\end{aligned}$$

Ainsi, on a que

$$\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}.$$

Preuve graphique :



□

Note : les deux dernières propriétés considérées ensemble forment une propriété appelée *linéarité* de la dérivée. Les limites et plusieurs autres constructions mathématiques étudiées au collégial on cette propriété de « linéarité », qui est le sujet d'étude central du cours d'algèbre *linéaire*.

Exemple 4.3.

$$\big(-x^2+3x\big)' = \big(-x^2\big)'+\big(3x\big)' \qquad \big(x^2-3x\big)' = \big(x^2+(-3x)\big)' = \big(x^2\big)'+\big(-3x\big)'$$

Proposition 4.8 (Puissances)**.** Si $n \in \ltimes$, alors

$$\frac{d\big(x^n\big)}{dx} = nx^{n-1}.$$

Exemple 4.4.

$$\big(x^3\big)' = 3x^2 \qquad \big(x^{10}\big)' = 10x^9 \qquad \big(x^{743}\big)' = 743x^{742} \qquad (x^1)' = 1\cdot x^0 = 1$$

Démonstration. Pour cette preuve, nous utiliserons le triangle de Pascal pour développer $(x+dx)^n$. Ce développement débute ainsi :

$$(x+dx)^n = x^n + nx^{n-1}\,dx + (\text{ termes où } dx \text{ apparait avec au un exposant} \geq 2).$$

Exemple 4.5. À l'aide des propriétés précédentes, on peut déterminer la dérivée d'une fonction polynômiale quelconque. Par exemple

$$\begin{aligned}
\left(3x^2-2x+4\right)' &= (3x^2)'-(2x)'+(4)' \\
&= 3(x^2)'-3(x)'+(4)' \\
&= 3(x^2)'-3(x)'+(4)' \\
&= 3(2x^1)-3(1)+(0) \\
&= 6x-3
\end{aligned}$$

□

Par la suite, nous ne donnerons pas autant de détails pour la dérivée des polynômes. La plupart du temps, nous donnerons directement le résultat.

4.2 Dérivée d'un produit et d'un quotient

Proposition 4.9 (Dérivée d'un produit, formule de Liebniz)**.** Si u et v sont toutes deux des fonctions de x, alors sous forme différentielle

$$d\left(uv\right) = vdu+udv.$$

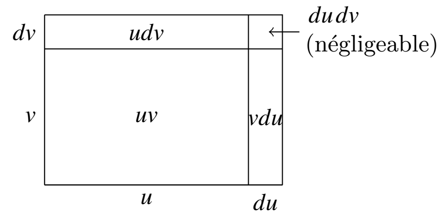
Le taux de variation instantané est donc

$$\frac{d\left(uv\right)}{dx} = \frac{vdu+udv}{dx}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\frac{d\left(uv\right)}{dx} &= \frac{\left((u+du)(v+dv)\right)-(uv)}{dx} \\
&= \frac{\left(uv+vdu+udv+dudv\right)-uv}{dx} \\
&= \frac{vdu+udv+dudv}{dx} \\
&\approx \frac{vdu+udv}{dx} \qquad \text{car } dudv \text{ est très petit quand } du \text{ et } dv \text{ sont petits} \\
&= v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}
\end{aligned}$$

Preuve graphique :



$\square$

Proposition 4.10. Si f est une fonction dérivable en x, alors

(a) $\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

(b) $\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)' = \dfrac{-g'(x)}{(g(x))^2}$

(c) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

Exemple 4.6. En utilisant la formule de Liebniz, on trouve que

$$\begin{aligned}
\big((x^4+1)(x^6+1)\big)' &= (x^4+1)'(x^6+1) + (x^4+1)(x^6+1)' \\
&= (4x^3)(x^6+1) + (x^4+1)(6x^5) \\
&= (4x^9+4x^3) + (6x^9+6x^5) \\
&= 10x^9 + 6x^5 + 4x^3
\end{aligned}$$

Proposition 4.11 (Dérivée d'un quotient)**.** Si u et v sont toutes deux des fonctions de x, alors, partout où $\frac{1}{v}$ est définie :

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Sous forme de taux de variation instantané

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

Démonstration. Première preuve à l'aide de la formule de Liebniz :

$$\begin{aligned}
d\left(\frac{u}{v}\right) &= d\left(u\frac{1}{v}\right) \\
&= \frac{1}{v}du + u\,d\left(\frac{1}{v}\right) && \text{(Formule de Liebniz)} \\
&= \frac{du}{v} + u\,\frac{-1}{v^2}\,dv \\
&= \frac{du}{v} - \frac{udv}{v^2} \\
&= \frac{vdu}{v^2} - \frac{udv}{v^2} \\
&= \frac{vdu - udv}{v^2}
\end{aligned}$$

Deuxième preuve directement avec la définition $dy = f(x+dx) - f(x)$. La fonction à dériver est $f(x) = \frac{u}{v}$. Si x varie de dx, alors u et v varient respectivement de du et dv pour devenir $u + du$ et $v + dv$.

$$\begin{aligned}
d\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{u+du}{v+dv} - \frac{u}{v} \\
&= \frac{v(u+du) - u(v+dv)}{v(v+dv)} \\
&= \frac{(vu + v\,du) - (uv + u\,dv)}{v^2 + vdv} \\
&= \frac{vu + v\,du - uv - u\,dv}{v^2 + vdv} \\
&= \frac{v\,du - u\,dv}{v^2 + vdv} \\
&\approx \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}
\end{aligned}$$

□

Exemple 4.7. En utilisant la propriété 4.11 permettant de calculer la dérivée d'un quotient, on trouve que

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^4+1}{x^6++1}\right)' &= \frac{(x^4+1)'(x^6+1)-(x^4+1)(x^6+1)'}{(x^6+1)^2}\\ &= \frac{4x^3(x^6+1)-(x^4+1)(6x^5)}{(x^6+1)^2}\\ &= \frac{(4x^9+4x^3)-(6x^9+6x^5)}{(x^6+1)^2}\\ &= \frac{-2x^9+6x^5+4x^3}{(x^6+1)^2}\end{aligned}$$

Proposition 4.12 (Inverse d'une puissance)**.**

$$\frac{d(x^{-n})}{dx} = -nx^{-n-1}$$

Démonstration. On détermine $\left(x^{-n}\right)'$ de deux manière différentes en utilisent l'identité algébrique et à l'aide de la formule pour la dérivée d'un produit.

$$x^n x^{-n} = 1.$$

En calculant la dérivée de chaque membre de cette égalité, on trouve que

$$\left(x^n x^{-n}\right)' = (1)' = 0$$

parce que $(C)' = 0$ pour n'importe quelle constante.

On peut aussi utiliser la formule donnant la dérivée d'un produit :

$$\begin{aligned}\left(x^n x^{-n}\right)' &= x^{-n}\left(x^n\right)' + x^n\left(x^{-n}\right)'\\ &= x^{-n}\left(nx^{n-1}\right)dx + x^n\left(x^{-n}\right)'.\end{aligned}$$

Comme on calcule la différentielle d'une même expression de deux manières différentes, les deux résultats doivent être égaux. On doit donc avoir que

$$x^{-n}nx^{n-1}dx + x^n\left(x^{-n}\right)' = 0$$

On isole $d\left(x^{-n}\right)'$ dans cette dernière égalité :

$$\left(x^{-n}\right)' = -n\frac{x^{-n}x^{n-1}}{x^n}dx$$

On trouve enfin, en simplifiant l'expression obtenue :

$$\left(x^{-n}\right)' = -nx^{-n-1}dx,$$

ce qui est le résultat désiré. □

Démonstration. Preuve à l'aide de la formule de dérivation d'un quotient.

□

Exemple 4.8. ++

On peut remarquer que les formules trouvées dans les trois dernières propositions sont toutes des cas particulier d'un schéma plus général :

$$d\left(x^r\right) = rx^{r-1}$$

pour r un exposant rationnel quelconque. On fera l'hypothèse suivante : cette formule est aussi valable pour n'importe quel exposant réel r.

Hypothèse 1. *La formule*

$$d\left(x^r\right) = rx^{r-1}$$

est valable pour tout nombre réel r*.*

4.2.1 Règle de chaine

Proposition 4.13. Si z est fonction de y fonction de x, alors le taux de variation total est le produit des taux de variations :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

Démonstration.

$$\frac{dz}{\cancel{dy}}\frac{\cancel{dy}}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

□

Exemple 4.9. Soient $z = y^3$ et $y = \sqrt{x}$ deux fonctions. On aimerait connaitre le taux de variation de z par rapport à x. On utilise la règle de chaine. Noter que l'on veut le taux de variation en fonction de x. Il faut donc exprimer $\dfrac{dz}{dy}$ en fonction de

x en substituant $\sqrt{x}$ pour y.

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dx} &= \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} \\
&= (3y^2)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \\
&= \left(3\left(\sqrt{x}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \\
&= (3x)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \\
&= \frac{3x}{2\sqrt{x}} \\
&= \frac{3\sqrt{x}}{2}
\end{aligned}$$

4.3 Dérivation implicite

Il est possible de définir une fonction par une équation. Par exemple :

$$y = \frac{1}{x} \qquad y = x^2$$

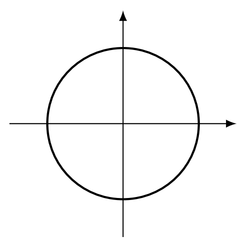
On pourrait aussi définir ces fonctions par les équations suivantes

$$xy = 1 \qquad x^2 - y = 0.$$

Dans une telle définition implicite, il faut cependant spécifier quelle variable est fonction de l'autre. Par habitude, nous prenons souvent y comme fonction de x.

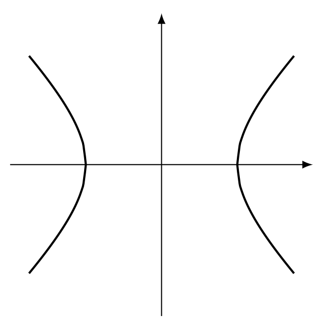
Nous savons cependant qu'une équation ne peut pas toujours être vue comme une définition implicite d'une fonction. Par exemple l'équation du cercle de rayon 1

$$x^2 + y^2 = 1$$



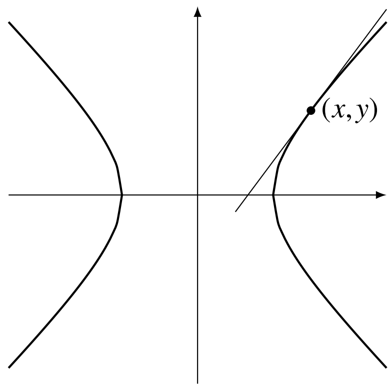
ou encore celle d'une hyperbole

$$x^2 - y^2 = 1$$



Même si ces équations établissent des relations entre les variables x et y sans que ces relations soient des fonctions, il est possible de déterminer la pente des tangentes à ces courbes à l'aide de la dérivée en supposant qu'il est possible *localement* de supposer que ces courbes sont le graphe d'une fonction définie implicitement.

Exemple 4.10. Prenons l'hyperbole définie par l'équation $x^2 - y^2 = 1$. On veut connaitre la pente de la tangente au point (x, y).



On suppose que « localement » y est une fonction de x, que l'on pourrait écrire comme $y = f(x)$.

Comme le point (x, y) est sur la courbe, on doit avoir que

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Si on considère chaque membre de cette égalité comme une fonction, on peut les dériver et ont obtient le même résultat :

$$\left(x^2 - y^2\right)' = \left(1\right)'.$$

$$2x - 2yy' = 0.$$

Notez le « y' » : c'est la « dérivée de l'intérieur » dans l'application de la règle de chaine. En effet, on pourrait écrire y^2 comme $(f(x))^2$ puisque $y = f(x)$. En dérivant sous cette forme avec la règle de chaine on obtient

$$\left((f(x))^2\right)' = 2f(x)f'(x).$$

Comme $2f(x)f'(x) = 2yy'$, on voit que la dérivée de y^2 *par rapport à* x est bien $2yy'$.

Enfin, on isole y' dans l'égalité $2x - 2yy' = 0$ pour obtenir une expression donnant la pente de la tangente en fonction des coordonnées x et y du point (x, y) :

$$y' = \frac{-2x}{-2y} = \frac{x}{y}$$

On peut utiliser ce résultat pour déterminer la pente de la tangente au point $(2, \sqrt{3})$. On vérifie que ce point est bien sur l'hyperbole :

$$2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 4 - 3 = 1.$$

(Si le point n'était pas sur l'hyperbole, l'hypothèse de départ de ce calcul serait fausse et la conclusion $y' = \frac{x}{y}$ le serait aussi !)

La pente de la tangente au point donné est donc

$$y' = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

4.3.1 Taux liés

La règle de chaine permet l'étude de taux de variation de variables liées entre elle par une relations, comme dans la section précédente.

Exemple 4.11. Imaginons un cercle dont le rayon r varie dans le temps. Si le rayon varie, l'aide du cercle doit varier elle aussi car les deux quantités sont reliés par l'équation

$$A = \pi r^2.$$

On a donc une situation où l'aire A est fonction du rayon r, lui-même fonction du temps. Pour connaitre le taux de variation de l'aire en fonction du temps, on utilise la règle de chaine :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr}\frac{dr}{dt}$$
$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt}$$

Si le taux de variation du rayon $\frac{dr}{dt}$ est de $55\,\mathrm{cm/s}$ et que le rayon du cercle est de $10\,\mathrm{cm}$, le taux de variation de l'aire est

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r|_{r=10\,\mathrm{cm}}(5\,\mathrm{cm/s}) = 2\pi(10\,\mathrm{cm})(5\,\mathrm{cm/s}) = 100\pi\,\mathrm{cm^2/s} \approx 314.16\,\mathrm{cm^2/s}.$$

Notons que pour le taux de variation du rayon $\frac{dr}{dt}$ est de $55\,\mathrm{cm/s}$ et que le rayon du cercle est différent, par exemple de $100\,\mathrm{cm}$, le taux de variation de l'aire est

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r|_{r=100\,\mathrm{cm}}(5\,\mathrm{cm/s}) = 2\pi(100\,\mathrm{cm})(5\,\mathrm{cm/s}) = 1000\pi\,\mathrm{cm^2/s} \approx 3141.59\,\mathrm{cm^2/s}$$

On voit que le taux de variation de l'aire dépend du rayon du cercle. On explique cela géométriquement par le fait que pour un petit certle, un accroissement de son rayon de $5\,\mathrm{cm}$ aura un grand effet sur l'aire, alors que pour un grand cercle, un même accroissement du rayon aura peu d'effet sur l'aire.

4.4 Dérivée d'ordre supérieur

Le « taux de changements du taux de changement » est une autre quantitée importante pouvant nous donner de l'information sur le comportement d'une fonction. En dynamique, elle correspond à l'**accélération**, qui est le taux de changement de la vitesse, elle même le taux de changement de la position.

Comme le taux de changement d'une fonction un point de son graphe est donnée par la dérivée de la fonction, le taux de changement du taux de changement est donnée par la *dérivée de la dérivée*. On peut voir la dérivée d'une fonction comme une nouvelle fonction, que l'on peut dériver elle aussi.

Par exemple, si on prend $f(x) = x^3$, le taux de changement est donnée par $f'(x) = 3x2$. Le taux de changement de f' est donc donné par la **dérivée seconde** $f''(x) = 6x$.

Définition 4.1. On appelle **dérivée seconde** d'une fonction la dérivée de sa dérivée, que l'on dénote par

$$f''(x) \stackrel{\text{def}}{=} (f'(x))'$$

On défini de manière similaire la **dérivée troisième** $f'''(x)$, la **dérivée quatrième** $f''''(x)$, etc.

On appelle ces dérivées les **dérivées d'ordre supérieur**.

Exemple 4.12. Calculer la dérivée troisième de $f(x) = \sqrt{x}$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x} \\
f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
f''(x) &= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{2}\left(x^{-1/2}\right)' = -\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)x^{-3/2} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \\
f'''(x) &= \left(-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}\right)' = -\frac{1}{4}\left(x^{-3/2}\right)' = -\frac{1}{4}\left(\frac{-3}{2}\right)x^{-5/2} = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}
\end{aligned}$$

Comme on peut répéter la dérivation autant de fois que l'on veut, l'accumulation de « ' » peut alourdir la notation. Il est plus pratique d'avoir une notation qui indique plus simplement le nombre de fois qu'une fonction est dérivée.

Définition 4.2.

$$\begin{aligned}
\text{Dérivée première :}\quad & f^{(1)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} f'(x)\\
\text{Dérivée seconde :}\quad & f^{(2)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} f''(x) = (f'(x))'\\
\text{Dérivée troisième :}\quad & f^{(3)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} f'''(x) = \left(f^{(2)}(x)\right)'\\
\text{Dérivée quatrième :}\quad & f^{(4)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} f''''(x) = \left(f^{(3)}(x)\right)'\\
\text{Dérivée cinquième :}\quad & f^{(5)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left(f^{(4)}(x)\right)'\\
& \vdots\\
\text{Dérivée } n\text{-ième :}\quad & f^{(n)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left(f^{(n-1)}(x)\right)'
\end{aligned}$$

La dérivée d'ordre quelconque $f^{(n)}$ est appelée **dérivée n-ième**.

Par convention, la « dérivée 0-ieme » est la fonction elle même.

$$f^{(0)}(x) = f(x).$$

Les dérivées d'ordre supérieur ont une notation dans toute les variantes de la notation pour la dérivée. Le tableau suivant offre un panorama de ces notations.

Notations pour la dérivée seconde						
$f''(x)$	$f^{(2)}(x)$	y''	$\left(x^2\right)''$	$\dfrac{d^2y}{dx^2}$	$\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$	$\dfrac{d^2x^2}{dx^2}$
$f''(a)$	$f^{(2)}(a)$	$y''\vert_{x=a}$	$\left(x^2\right)''\Big\vert_{x=a}$	$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right\vert_{x=a}$	$\left.\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}\right\vert_{x=a}$	$\left.\dfrac{d^2x^2}{dx^2}\right\vert_{x=a}$

,