

## 4 Chapitre 4

### 4.1 Vecteurs dans le plan et l'espace

#### Question 1

Représenter les vecteurs suivants.

- a)  $\vec{v} = 2\angle 180^\circ$       b)  $\vec{v} = 7\angle 90^\circ$       c)  $\vec{v} = 4\angle 30^\circ$

#### Question 2

Représenter les vecteurs somme suivants.

- a)  $1\angle 0^\circ + 1\angle 90^\circ$       c)  $3\angle 180^\circ + 2\angle 90^\circ$   
b)  $2\angle 0^\circ + 3\angle 270^\circ$       d)  $2\angle 30^\circ + 5\angle 60^\circ$

#### Question 3

Écrire les vecteurs suivants sous forme cartésienne.

- a)  $\vec{v} = 2\angle 180^\circ$       c)  $\vec{v} = 4\angle 30^\circ$       e)  $\vec{v} = 8\angle 300^\circ$   
b)  $\vec{v} = 7\angle 90^\circ$       d)  $\vec{v} = 6\angle 120^\circ$       f)  $\vec{v} = 2\angle 135^\circ$

#### Question 4

Écrire les vecteurs suivants sous forme polaire.

- a)  $\vec{v} = (2, 0)$       c)  $\vec{v} = (6, -6)$       e)  $\vec{v} = (1, 3)$   
b)  $\vec{v} = (0, -9)$       d)  $\vec{v} = (3, 4)$       f)  $\vec{v} = (9, -1)$

#### Question 5

Soient les vecteurs

$$\vec{u} = (-1, 3), \quad \vec{v} = (2, 3), \quad \vec{w} = (3, -5);$$

évaluer les expressions suivantes.

- a)  $3\vec{u}$       c)  $\vec{u} + \vec{v}$       e)  $3\vec{u} - 2\vec{v}$   
b)  $-\vec{v}$       d)  $\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$       f)  $-\vec{w} + \vec{u} - 5\vec{v}$

#### Question 6

Calculer la longueur des vecteurs suivants.

- a)  $\vec{v} = (4, 0)$       d)  $\vec{v} = (6, -6, 3)$   
b)  $\vec{v} = (2, 3)$       e)  $\vec{v} = (-2, -5, 3)$   
c)  $\vec{v} = (4, -5)$       f)  $\vec{v} = (4, 3, 1)$

#### Question 7

Soient les vecteurs

$$\vec{a} = (2, 3), \quad \vec{b} = (5, 4), \quad \vec{c} = (6, -1), \quad \vec{d} = (-2, 0);$$

évaluer les expressions suivantes.

- a)  $2\vec{a} + 4\vec{b}$       e)  $\|\vec{a} + \vec{c}\| - \|\vec{a}\| - \|\vec{c}\|$   
b)  $3\vec{b} - 4\vec{d}$       f)  $\|\vec{c} + \vec{d}\|^2 - \|\vec{c} - \vec{d}\|^2$   
c)  $\vec{a} - (\vec{b} + \vec{c})$       g)  $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 + \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\|^2 - 2\|\vec{b}\|^2$   
d)  $\|\vec{b} + \vec{c}\|$

#### Question 8

Trouver un vecteur unitaire parallèle à chacun des vecteurs suivants.

- a)  $\vec{v} = (4, 0)$       d)  $\vec{v} = (6, -6, 3)$   
b)  $\vec{v} = (2, 3)$       e)  $\vec{v} = (-2, -5, 3)$   
c)  $\vec{v} = (4, -5)$       f)  $\vec{v} = (4, 3, 1)$

#### Question 9

Trouver un vecteur ayant la même direction et le même sens que  $\vec{v} = (-3, 5)$  mais de longueur 7.

#### Question 10

Calculer les produits scalaires suivants.

- a)  $(1, 2) \cdot (3, -4)$       d)  $(1, 2, 3) \cdot (3, 1, 1)$   
b)  $(3, 3) \cdot (-2, 4)$       e)  $(2, -1, 5) \cdot (3, 5, 7)$   
c)  $(5, 1) \cdot (-1, 5)$       f)  $(-2, 0, -1) \cdot (0, 8, 0)$

### Question 11

Trouver l'angle entre les vecteurs suivants en terme de la fonction arccos.

- a) (1, 2) et (3, -4)                      d) (1, 2, 3) et (3, 1, 1)  
 b) (3, 3) et (-2, 4)                      e) (2, -1, 5) et (3, 5, 7)  
 c) (5, 1) et (-1, 5)                      f) (-2, 0, -1) et (0, 8, 0)

### Question 12

Trouver deux vecteurs perpendiculaires de même longueur que chacun des vecteurs suivants.

- a) (3, 5)                                      c) (-9, -1)  
 b) (-2, 4)                                  d) (-2, 11)

### Question 13

Démontrer que les relations suivantes sont vraies pour tous vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  et tout scalaire  $k \in \mathbb{R}$  :

- (Commutativité)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- (Distributivité)  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- (Compatibilité avec la multiplication scalaire)

$$(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

- (Produit scalaire et norme)  $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$
- (Loi du parallélogramme)

$$2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$$

## 4.2 Arithmétique dans $\mathbb{C}$

### Question 14

Pour chacun des nombres suivants, donner la partie réelle, la partie imaginaire, le module et l'argument.

- a) 1                      b)  $i$                       c)  $1 + 3i$                       d)  $6 - i$

### Question 15

Effectuer les opérations suivantes.

- a)  $(4 + i) + (3 - 2i)$                       d)  $(2 + i)(1 - 2i)$   
 b)  $(i - 4) + (5 + 2i)$                       e)  $3i(2 - 5i)$   
 c)  $(9 + 2i) - (-4 + 5i)$                       f)  $(5 + 9i)(5 - 9i)$

### Question 16

Trouver le conjugué des nombres complexes suivants.

- a)  $3 + 2i$                       b) 8                      c)  $-7i$                       d)  $7 - 3i$

### Question 17

Effectuer les divisions suivantes.

- a)  $\frac{3 + 2i}{i}$                                       c)  $\frac{4 - 5i}{2 + 2i}$   
 b)  $\frac{4}{1 - i}$                                       d)  $\frac{1 - i}{1 + i}$

### Question 18

Écrire les nombres complexes suivants sous la forme polaire.

- a) 4                                      c)  $3i$                                       e)  $1 + i$   
 b)  $-5$                                       d)  $-2i$                                       f)  $\sqrt{3} - i$

### Question 19

Écrire les nombres complexes suivants sous la forme cartésienne.

- a)  $3(\cos \pi + i \sin \pi)$                       c)  $2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$   
 b)  $5\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$                       d)  $9\left(\cos -\frac{3\pi}{4} + i \sin -\frac{3\pi}{4}\right)$

### Question 20

Effectuer les opérations suivantes à l'aide de la formule de Moivre.

a)  $i^7$

c)  $(-4+4i)^3$

b)  $(1+i)^{10}$

d)  $(1-\sqrt{3}i)^6$

**Question 21**

Écrire la somme de fonctions sinusoïdales de même fréquence suivantes comme une seule fonction sinusoïdale en exprimant celles-ci comme parties imaginaires de nombres complexes.

a)  $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

b)  $f(x) = \sin(3x) + 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$

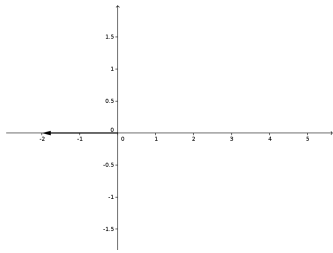
c)  $f(x) = 3\sin(2x) + 4\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

d)  $f(x) = 5\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{5\pi}{6}\right)$

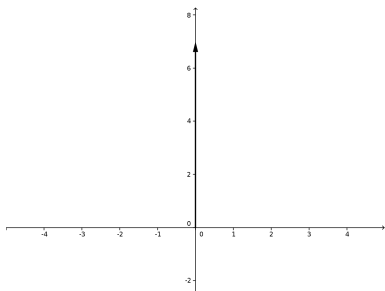
# Réponses aux exercices

## Question 1

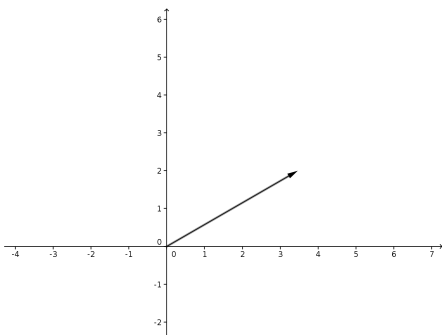
a)



b)

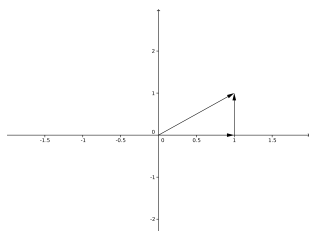


c)

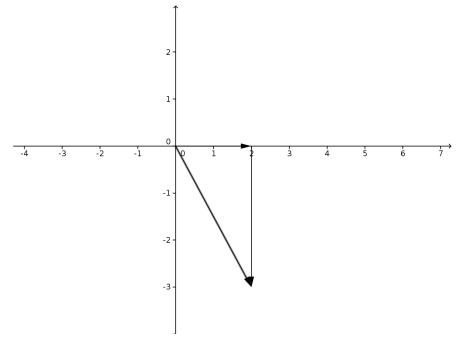


## Question 2

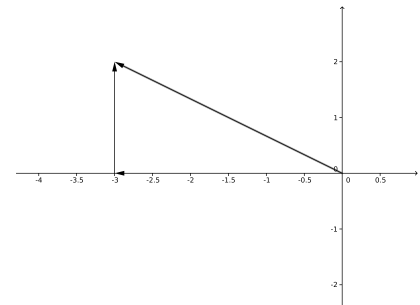
a)



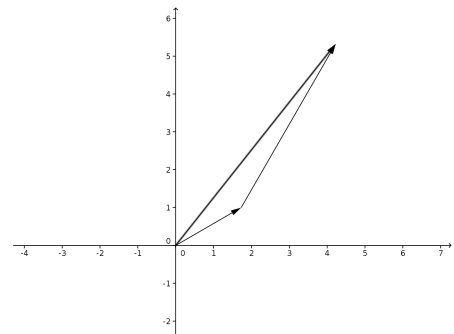
b)



c)



d)



## Question 3

- |                     |                            |
|---------------------|----------------------------|
| a) $(-2, 0)$        | d) $(-3, 3\sqrt{3})$       |
| b) $(0, 7)$         | e) $(4, -4\sqrt{3})$       |
| c) $(2\sqrt{3}, 2)$ | f) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ |

## Question 4

- |                                |                                   |
|--------------------------------|-----------------------------------|
| a) $2\angle 0^\circ$           | d) $5\angle 53,13^\circ$          |
| b) $9\angle 270^\circ$         | e) $\sqrt{10}\angle 71,57^\circ$  |
| c) $\sqrt{72}\angle 315^\circ$ | f) $\sqrt{82}\angle 353,66^\circ$ |

**Question 5**

- a)  $(-3, 9)$       c)  $(1, 6)$       e)  $(-7, 3)$   
 b)  $(-2, -3)$       d)  $(0, -5)$       f)  $(-14, -7)$

**Question 6**

- a) 4      c)  $\sqrt{41}$       e)  $\sqrt{38}$   
 b)  $\sqrt{13}$       d) 9      f)  $\sqrt{26}$

**Question 7**

- a)  $(24, 22)$       e)  $2\sqrt{17}$   
 b)  $(23, 12)$       f)  $-48$   
 c)  $(-9, 0)$   
 d)  $\sqrt{130}$       g) 0

**Question 8**

- a)  $(1, 0)$       d)  $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$   
 b)  $\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$       e)  $\left(-\frac{2}{\sqrt{38}}, -\frac{5}{\sqrt{38}}, \frac{3}{\sqrt{38}}\right)$   
 c)  $\left(\frac{4}{\sqrt{41}}, -\frac{5}{\sqrt{41}}\right)$       f)  $\left(\frac{4}{\sqrt{26}}, \frac{3}{\sqrt{26}}, \frac{1}{\sqrt{26}}\right)$

**Question 9**  $\left(-\frac{21}{\sqrt{34}}, \frac{35}{\sqrt{34}}\right)$ **Question 10**

- a)  $-5$       c) 0      e) 36  
 b) 6      d) 8      f) 0

**Question 11**

- a)  $\arccos\left(-\frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{25}}\right) = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 117^\circ$   
 b)  $\arccos\left(\frac{6}{\sqrt{18}\sqrt{20}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \approx 72^\circ$   
 c)  $90^\circ$

d)  $\arccos\left(\frac{8}{\sqrt{14}\sqrt{11}}\right) \approx 50^\circ$

e)  $\arccos\left(\frac{36}{\sqrt{30}\sqrt{83}}\right) \approx 44^\circ$

f)  $90^\circ$

**Question 12**

- a)  $(-5, 3), (5, -3)$       c)  $(1, -9), (-1, 9)$   
 b)  $(4, 2), (-4, -2)$       d)  $(11, 2), (-11, -2)$

**Question 13** Écrire les vecteurs en coordonnées et comparer chaque côté des égalités.

**Question 14**

- a)  $\operatorname{Re}(1) = 1, \operatorname{Im}(1) = 0, |1| = 1, \arg(1) = 0.$   
 b)  $\operatorname{Re}(i) = 0, \operatorname{Im}(i) = 1, |i| = 1, \arg(i) = \pi/2.$   
 c)  $\operatorname{Re}(1+3i) = 1, \operatorname{Im}(1+3i) = 3, |1+3i| = \sqrt{10}, \arg(1+3i) = \arctan(3) \approx 71.57^\circ.$   
 d)  $\operatorname{Re}(6-i) = 6, \operatorname{Im}(6-i) = -1, |6-i| = \sqrt{37}, \arg(6-i) = \arctan(-1/6) \approx -9.46^\circ.$

**Question 15**

- a)  $7-i$       d)  $4-3i$   
 b)  $1+3i$       e)  $15+6i$   
 c)  $13-3i$       f) 106

**Question 16**

- a)  $3-2i$       b) 8      c)  $7i$       d)  $7+3i$

**Question 17**

- a)  $2-3i$       c)  $-\frac{1}{4} - \frac{9}{4}i$   
 b)  $2+2i$       d)  $-i$

**Question 18**

- a)  $4 = 4e^{0i}$                       d)  $-2i = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$   
b)  $-5 = 5e^{i\pi}$                       e)  $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$   
c)  $3i = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$                       f)  $\sqrt{3} - i = 2e^{i\frac{11\pi}{6}}$

**Question 19**

- a)  $-3$                                       c)  $\sqrt{3} + i$   
b)  $5i$                                       d)  $-\frac{9\sqrt{2}}{2} - \frac{9\sqrt{2}}{2}i$

**Question 20**

- a)  $-i$                                       c)  $128 + 128i$   
b)  $32i$                                     d)  $-64i$

**Question 21**

- a)  $\sin(x - \pi/6)$   
b)  $\sqrt{7} \sin\left(3x + \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$   
c)  $\left(\sqrt{25 + 4\sqrt{2}}\right) \sin\left(2x + \arctan\left(\frac{2\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}}\right)\right)$   
d)  $\left(\sqrt{26 + 5\sqrt{3}}\right) \sin\left(\frac{x}{2} - \arctan\left(\frac{1}{10 + \sqrt{3}}\right)\right)$