Yannick Delbecque — Département de mathématiques, Cégep St-Laurent
Outils mathématiques électroniques 1 — 201-716 — Automne 2019

# Formatif 4

**Question 1**
Déterminer les valeurs suivantes. Vous pouvez utiliser les dimensions du triangle rectangle suivant. Représenter l'angle où vous évaluer la fonction trigonométrique dans le cercle trigonométrique.

a) $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ b) $\tan\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

**Question 2**
Démontrer l'identité $\cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = \sin(\theta)$ à l'aide du cercle trigonométrique.

**Question 3**
Représenter les vecteurs suivants dans le plan cartésien.

a) $(-2, 3)$
b) $5\angle\frac{4\pi}{3}$rad

**Question 4**

a) Donner la représentation polaire du vecteur $\vec{u} = (-3, 4)$
b) Donner la représentation cartésienne du vecteur $\vec{v} = 2\angle\frac{2\pi}{3}$rad

**Question 5**
Soient les vecteurs suivants :

$$\vec{u} = (-3, 1), \quad \vec{v} = (2, 3) \text{ et } \vec{w} = (1, -2)$$

Évaluer les expression suivantes.

a) $3\vec{u}$ b) $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$ c) $||\vec{w}||$ d) $\vec{u} \cdot \vec{w}$

**Question 6**
Déterminer l'angle entre les vecteurs $(-2, 5)$ et $(3, -3)$.

**Question 7**
Donner un vecteur de même sens et direction que le vecteur $\vec{v} = (2, 4, -1)$ mais de longueur 10.

**Question 8**
Soient les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 2 + i, \quad z_2 = 4 - i, \quad z_3 = -2 + 5i \text{ et } z_4 = -7 - i$$

Évaluer les expression suivantes, donner la réponse sous la forme $a + bi$.

a) $\mathrm{Re}(z_1)$ c) $|z_2|$ e) $z_1 + z_2$ g) $\frac{z_1}{z_2}$
b) $\mathrm{Im}(z_4)$ d) $\overline{z_2}$ f) $z_3 z_4$ h) $\frac{3e^{i\pi/3}}{2e^{i\pi/6}}$

**Question 9**
Mettre les nombres complexes suivants dans la forme demandée.

a) $1 + i$ sous la forme polaire
b) $3e^{i\frac{\pi}{6}}$ sous forme cartésienne.

**Question 10**
Additionner les signaux sinusoïdaux suivants :

$$f_1(x) = 3\sin(x + \pi) \qquad f_2(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

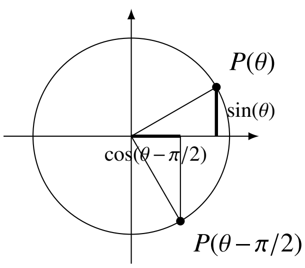
# Solutions

### Question 1

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

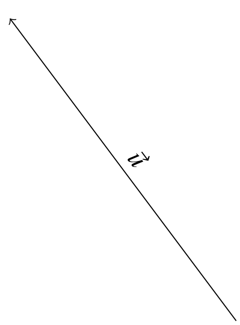
b) $\tan\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)} = \dfrac{-\sqrt{3}/2}{1/2} = -\sqrt{3}$

### Question 2

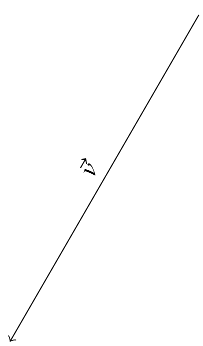



### Question 3

a)




b)




### Question 4

a) $||\vec{u}|| = \sqrt{(-3)^2+4^2} = \sqrt{25} = 5.$
$\theta_{\vec{u}} = \arctan\left(\frac{4}{-3}\right) = \arctan\left(-\frac{4}{3}\right)$. Donc

$$\vec{u} = 5\angle\arctan\left(-\frac{4}{3}\right)$$

b) $\vec{v} = \left(2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right), 2\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \left(2\left(-\frac{1}{2}\right), 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \left(-1, \sqrt{3}\right)$

### Question 5

a) $3\vec{u} = 3(-3,1) = (3(-3), 3(1)) = (-9,3)$.

b)

$$\begin{aligned}\vec{u}+\vec{v}-\vec{w} &= (-3,1)+(2,3)-(1,-2)\\ &= (-3+2-1, 1+3-(-2))\\ &= (-2,6)\end{aligned}$$

c) $||\vec{w}|| = \sqrt{1^2+(-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

d) $\vec{u}\cdot\vec{v} = (-3,1)\cdot(1,-2) = (-3)(1)+(1)(-2) = -5$

### Question 6

$$\begin{aligned}\theta &= \arccos\left(\frac{(-2,5)\cdot(3,-3)}{||(-2,5)||||(3,-3)||}\right)\\ &= \arccos\left(\frac{-21}{\sqrt{(-2)^2+5^2}\sqrt{3^2+(-3)^2}}\right)\\ &= \arccos\left(\frac{-21}{\sqrt{29}\sqrt{18}}\right)\end{aligned}$$

### Question 7

On normalise le vecteur $\vec{v}$ :

$$||\vec{v}|| = \sqrt{2^2+4^2+(-1)^2} = \sqrt{4+16+1} = \sqrt{21}$$

Le vecteur

$$\frac{\vec{v}}{||\vec{v}||} = \frac{1}{\sqrt{21}}(2,4,-1) = \left(\frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}}, -\frac{1}{\sqrt{21}}\right)$$

est un vecteur de longueur 1. En multipliant par le scalaire 10, on obtient un vecteur de longueur 10 :

$$\begin{aligned}10\frac{\vec{v}}{||\vec{v}||} &= 10\left(\frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}}, -\frac{1}{\sqrt{21}}\right)\\ &= \left(\frac{20}{\sqrt{21}}, \frac{40}{\sqrt{21}}, -\frac{10}{\sqrt{21}}\right)\end{aligned}$$

### Question 8

a) $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(2+i) = 2.$

b) $\mathrm{Im}(z_4) = \mathrm{Im}(-7-i) = -1$

c) $|z_2| = \sqrt{4^2+(-1)^2} = \sqrt{17}$

d) $\overline{z_2} = \overline{4-i} = 4+i$

e) $(2+i)+(4-i) = 6$

f) $(-2+5i)(-7-i) = ((-2)(-7)-5(-1)) + ((5)(-7)+(-2)(-1))i = 19-33i$

g) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+i}{4-i} = \frac{(2+i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} = \frac{((2)(4)+i^2)+(2+4)i}{\left(\sqrt{4^2+(-1)^2}\right)^2} = \frac{7+6i}{17} = \frac{7}{17}+\frac{6}{17}i$

h) $\frac{3e^{i\pi/3}}{2e^{\pi/6}} = \frac{3}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{3}{2}e^{i\pi/6} = \frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{4}i$

### Question 9

a) $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$;
$\theta = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

b) $3e^{i\frac{pi}{6}} = 3(\cos(\pi/6)+i\sin(\pi/6)) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}+i\frac{3}{2}$.

### Question 10

Nombre complexe de départ associé à $f_1$ :

$$z_1 = 3e^{i\pi} = -3+0i.$$

Nombre complexe associé à $f_2$ :

$$z_2 = 2e^{i\pi/4} = \sqrt{2}+\sqrt{2}i.$$

Somme $z = z_1+z_2$ :

$$z = 3+\sqrt{2}+\sqrt{2}i.$$

Forme polaire de $z$ : $|z| = \sqrt{(-3+\sqrt{2})^2+\sqrt{2}^2} = \sqrt{(-3+\sqrt{2})^2+2}$.

$\phi = \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{-3+\sqrt{2}}\right)$

La fonction sinuosidale résultante est

$$\begin{aligned}f_1(t)+f_2(t) &= |z|\sin(t+\phi)\\ &= \left(\sqrt{(-3+\sqrt{2})^2+2}\right)\sin\left(t+\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{-3+\sqrt{2}}\right)\right)\end{aligned}$$