# Analyse de fonctions

## Croissance et extremums locaux

**Question 1**
Démontrer avec la définition de croissance d'une fonction que $f(x) = x^3$ est croissante sur l'intervalle $[0, \infty[$.

**Question 2**
À l'aide d'un tableau de signe, étudier le signe de la fonction

$$f(x) = \frac{(x+1)^2(x+2)^3(x+3)^4}{(x-3)^5}.$$

**Question 3**
Soit la fonction $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$.

a) $f(x)$ est-elle positive en $x = 2$ ?
b) $f$ est-elle croissante dans le voisinage de $x = 2$ ?
c) $f$ est-elle croissante dans le voisinage de $x = 5$ ?
d) $f$ est-elle croissante sur l'intervalle $[1, 6]$ ?

**Question 4**
Pour chacune des fonctions suivantes, trouver les intervalles de croissance, les intervalles de décroissance et les extremums locaux.

a) $y = 4x^3 - x + 4$
b) $y = 2x^4$
c) $y = \dfrac{x+2}{3x-1}$
d) $y = \sqrt{2x-1}$
e) $y = x^3 - 18x^2 + 105x + 41$
f) $y = \dfrac{x}{x^2+16}$
g) $y = 3x^5 - 25x^3 + 60x - 1$
h) $y = (x-2)^2(x-3)$
i) $y = \sqrt[3]{x-3}$
j) $y = \dfrac{x^2+8}{x-1}$
k) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+2}$
l) $y = (2x-3)^{2/3}$

**Question 5**
Trouver les maximums, les minimums et les points stationnaires des fonctions suivantes.

a) $y = x^2 - 3x + 1$
b) $f(x) = x^3 - 3x$
c) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 9$
d) $f(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$

**Question 6**
Déterminer le domaine ainsi que les valeurs critiques de la dérivée première, les minimums et les maximums et faire une esquisse de la fonction définie par

$$f(x) = x\sqrt{3-x}.$$

**Question 7**
Tracer une esquisse de la fonction $y = x\sqrt{2-x^2}$.

**Question 8**
Montrer, en utilisant le calcul différentiel, que le sommet d'une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ se situe à

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

**Question 9**
Trouver la valeur de $x$ pour laquelle la croissance de la fonction

$$y = \frac{1}{1+x^2}$$

est la plus rapide.

**Question 10**
Sachant qu'un polynôme de degré $n$ a au plus $n$ zéros, dire jusqu'à combien de maximums et de minimums peut avoir la fonction

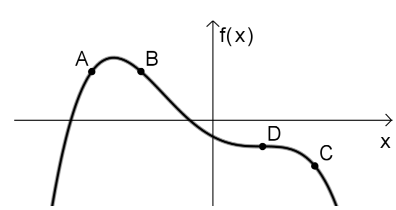
$$f(x) = x^{2013} - x^{11} + x^8 - 1.$$

## Concavité et points d'inflexion

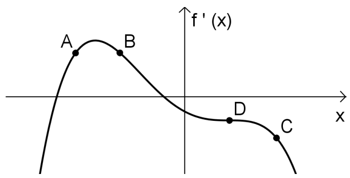
**Question 11**
Esquisser le graphe d'une fonction ayant les propriétés données.

a) $f$ est concave vers le haut et croissante sur $\mathbb{R}$.
b) $f$ est concave vers le bas et croissante sur $\mathbb{R}$.
c) $f$ est concave vers le haut et décroissante sur $\mathbb{R}$.
d) $f$ est concave vers le bas et décroissante sur $\mathbb{R}$.

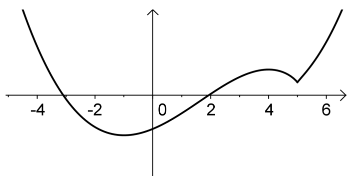
**Question 12**
En se référant au graphique de $y = f(x)$ ci-dessous, déterminer les signes de $\frac{dy}{dx}$ et de $\frac{d^2y}{dx^2}$ aux points $A$, $B$, $C$ et $D$.



**Question 13**
Soit la fonction $y = f(x)$. En se référant au graphique de $f'(x)$ ci-dessous, déterminer les signes de $\frac{dy}{dx}$ et de $\frac{d^2y}{dx^2}$ aux points $A$, $B$, $C$ et $D$.

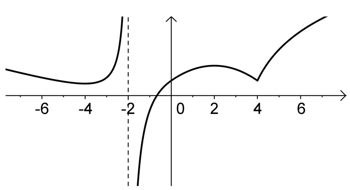



**Question 14**
Répondre aux questions suivantes selon le graphique de $y = f(x)$ ci-dessous.




a) Trouver les intervalles où $f$ est croissante.
b) Trouver les intervalles où $f$ est décroissante.
c) Trouver les intervalles où $f$ est concave vers le haut.
d) Trouver les intervalles où $f$ est concave vers le bas.
e) Trouver les valeurs de $x$ où $f$ a un maximum local.
f) Trouver les valeurs de $x$ où $f$ a un minimum local.
g) Trouver les valeurs de $x$ où $f$ a un point d'inflexion.

**Question 15**
Répondre aux questions suivantes selon le graphique de $y = f(x)$ ci-dessous.




a) Trouver les intervalles où $f$ est croissante.
b) Trouver les intervalles où $f$ est décroissante.
c) Trouver les intervalles où $f$ est concave vers le haut.
d) Trouver les intervalles où $f$ est concave vers le bas.
e) Trouver les valeurs de $x$ où $f$ a un maximum local.
f) Trouver les valeurs de $x$ où $f$ a un minimum local.
g) Trouver les valeurs de $x$ où $f$ a un point d'inflexion.

**Question 16**
Étudier la concavité et trouver les points d'inflexion de chacune des fonctions suivantes.

a) $f(x) = 5 - (x-7)^4$
b) $f(x) = 2x^6 - 5x^4 + 1$
c) $f(x) = \sqrt[3]{3x+1} - 7$
d) $f(x) = 1 - (x-4)^{\frac{2}{3}}$
e) $f(x) = (1-3x)^3(2x-3)$

**Question 17**
Faire l'analyse de la concavité de la fonction

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 2$$

**Question 18**
Utiliser, si possible, le test de la dérivée seconde pour trouver les extremums locaux des fonctions suivantes.

a) $y = x^2 - x + 1$
b) $y = 2x^2 - x + 8$
c) $y = x^3 - 1$
d) $y = x^3 - 15x^2 - 33x$
e) $y = x^4 - 6x^2 + 1$
f) $y = \dfrac{x^2}{x+1}$

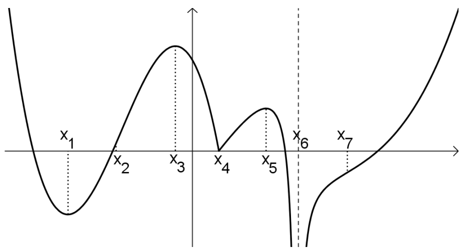
## Extremums absolus

**Question 19**
Trouver les minimums et les maximums globaux des fonctions suivantes dans l'intervalle donné.

a) $y = 5x^2 + 8x - 4$ sur $[1, 3]$
b) $y = \sqrt{x^2 - 1}$ sur $[2, 4]$
c) $y = \dfrac{x^2}{1-x}$ sur $[0, 3]$
d) $y = 3x^4 + 16x^3 + 6x^2 - 72x + 1$ sur $[-4, 4]$
e) $y = \dfrac{4-x}{6x+1}$ sur $[0, 3]$
f) $y = \dfrac{x-3}{2x-1}$ sur $[-1, 1]$
g) $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 7$ sur $[-4, 4]$
h) $y = \dfrac{2x^2 + x + 8}{x}$ sur $[-1, 3]$
i) $y = (x-2)^2(x-3)$ sur $[-2, 5]$
j) $y = \dfrac{x^2+8}{x-1}$ sur $[0, \infty[$
k) $y = (2x-3)^{2/3}$ sur $\mathbb{R}$
l) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$ sur $[3, \infty[$

## Exercices récapitulatifs

**Question 20**
Répondre aux questions suivante sur le graphique de la fonction $f$ donné ci-dessous.




a) Trouver les valeurs de $x$ où $f$ a un minimum local.

b) Trouver les valeurs de $x$ où $f$ a un maximum local.

c) Trouver les valeurs de $x$ où $f$ a un point d'inflexion.

d) Trouver les valeurs de $x$ où $f$ n'est pas dérivable.

e) Quel est le maximum absolu sur l'intervalle $[0, x_6[$ ?

f) Quel est le minimum absolu sur l'intervalle $[x_2, x_5]$ ?

g) Quels sont les extremums absolus sur l'intervalle $[x_1, x_7]$ ?

**Question 21**
Sur quel(s) intervalle(s) les fonction suivantes sont-elles croissante ?

a) $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 1$

b) $y = \dfrac{2x^2 + x + 8}{x}$

c) $y = \dfrac{8 - 7x}{x^2 - 1}$

**Question 22**
Sur quel(s) intervalle(s) la fonction donnée est-elle concave vers le bas ?

a) $f(x) = (1 - 4x)^3$

b) $f(x) = (x - 1)^2(x + 1)^2$

c) $f(x) = x\sqrt{2 - x^2}$

**Question 23**
Faire l'étude complète de chaque fonction et tracer une esquisse de son graphique respectant son domaine, ses asymptotes, ses intervalles de croissance et de concavité, ses extremums et ses points d'inflexion.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x^2}$

b) $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1$

c) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x - 6)^{\frac{1}{3}}$

d) $f(x) = \dfrac{4x^2 - 3x + 3}{x - 1}$

e) $f(x) = (x - 1)^3(x + 3)^2$

**Question 24**
Utiliser, si possible, le test de la dérivée seconde pour trouver les extremums locaux des fonctions suivantes.

a) $y = x^3 - 6x^2 - 63x$

b) $y = \dfrac{x^2 + 8}{x - 1}$

c) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 2}$

**Question 25**
Trouver les minimums et les maximums absolus des fonctions suivantes dans l'intervalle donné.

a) $y = x^3 - 18x^2 + 105x + 41$ sur $[4, 8]$

b) $y = x^4 - 2x^2 + 2$ sur $[-2, 2]$

c) $y = \dfrac{x}{x^2 + 16}$ sur $[1, \infty[$

**Question 26**
Vrai ou faux. Trouver un contre-exemple si l'énoncé est faux.

a) Si $f$ et $g$ sont croissantes sur un intervalle, alors $f + g$ l'est également.

b) Si $f$ et $g$ sont croissantes sur un intervalle, alors $f \cdot g$ l'est également.

c) Si $f$ et $g$ sont concaves vers le haut sur un intervalle, alors $f + g$ l'est également.

d) Si $f$ et $g$ sont concaves vers le haut sur un intervalle, alors $f \cdot g$ l'est également.

**Question 27**
Soit un polynôme de degré trois $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

a) Montrer que ce polynôme ne possède qu'un seul point d'inflexion.

b) Montrer que si ce polynôme a 3 zéros, alors la coordonnée en $x$ de ce point d'inflexion correspond à la moyenne des 3 zéros.

c) Trouver le point d'inflexion de $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ en utilisant d'abord le résultat montré en b), puis à l'aide de la dérivée seconde.

# Solutions

## Croissance et extremums locaux

### Question 1

Supposons que $0 \leq x_1 < x_2$. Il faut montrer que $f(x_1) \leq f(x_2)$.

$$\begin{aligned} f(x_1) \leq f(x) &\iff x_1^3 \leq x_2^3 \\ &\iff 0 \leq x_2^3 - x_1^3 \\ &\iff 0 \leq (x_2 - x_1)(x_2^3 + x_1 x^2 + x_1^3) \end{aligned}$$

On montre que $(x_2 - x_1)(x_2^3 + x_1 x^2 + x_1^3)$ est positif en vérifiant que chacun de ses facteurs est positif.

Comme $x_1 < x_2$, on a que $0 < x_2 - x_1$, ce qui implique que le premier facteur est positif.

Les terme $x_1^2$ et $x_2^2$ du second facteur sont positifs. Comme par hypothèse $x_1$ et $x_2$ sont positifs, leur produit $x_1 x_2$ doit aussi l'être.

Ainsi, le second facteur $x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2$ est une somme de termes positifs, qui est donc elle aussi positive.

Enfin, comme chaque facteur de $(x_2 - x_1)(x_2^3 + x_1 x^2 + x_1^3)$ est positif, le produit est aussi positif.

### Question 2

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-2$ | | $-1$ | | $3$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | | + | 0 | + | 0 | − | 0 | − | ∄ | + | |

### Question 3

a) Oui b) Non c) Oui d) Non

### Question 4

a) Croissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{2\sqrt{3}}\right]$ et sur $\left[\frac{1}{2\sqrt{3}}, \infty\right[$, décroissante sur $\left[-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right]$, maximum local en $\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{36+\sqrt{3}}{9}\right)$, minimum local en $\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{36-\sqrt{3}}{9}\right)$

b) Croissante sur $[0, \infty[$, décroissante sur $]-\infty, 0]$, minimum local en $(0, 0)$.

c) Croissante sur $\left]-\infty, \frac{1}{3}\right[$, décroissante sur $\left]\frac{1}{3}, \infty\right[$, aucun extremum local.

d) Croissante sur $[\frac{1}{2}, \infty[$, minimum local en $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

e) Croissante sur $]-\infty, 5]$ et sur $[7, \infty[$, décroissante sur $[5, 7]$, maximum local en $(5, 241)$, minimum local en $(7, 237)$.

f) Croissante sur $]-4, 4]$, décroissante sur $]-\infty, -4[$ et sur $]4, \infty]$, maximum local en $(4, 1/8)$, minimum local en $(-4, -1/8)$.

g) Croissante sur $-\infty, -2]$, sur $[-1, 1]$ et sur $[2, \infty[$, décroissante sur $[-2, -1]$ et sur $[1, 2]$, maximums locals en $(-2, -17)$ et en $(1, 37)$, minimums locals en $(-1, -39)$ et en $(2, 15)$.

h) Croissante sur $]-\infty, 2]$ et sur $(8/3, \infty)$, décroissante sur $[2, 8/3]$, maximum local en $(2, 0)$, minimum local en $(8/3, -4/27)$.

i) Croissante sur $\mathbb{R}$, aucun extremum local.

j) Croissante sur $]-\infty, -2$ et sur $[4, \infty[$, décroissante sur $[-2, 0[$ et sur $]0, 4]$, maximum local en $(-2, -4)$, minimum local en $(4, 8)$.

k) Croissante sur $[0, \infty[$, décroissante sur $]-\infty, 0]$, minimum local en $(0, -1/2)$

l) Croissante sur $[3/2, \infty[$, décroissante sur $]-\infty, 3/2]$, minimum local en $(3/2, 0)$.

### Question 5

a) Valeurs critiques : $y' = 2x - 3$, donc $y' = 0 \iff x = 3/2$.

| $x$ | $-\infty$ | | $3/2$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | - | 0 | + | |
| | | ↘ | MIN | ↗ | |

La fonction $y$ a donc un min en $x = 3/2$.

b) Valeurs critiques : $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$. $f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 3 = 0 \iff x = \pm 1$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | + | 0 | - | 0 | + | |
| | | ↗ | MAX | ↘ | MIN | ↗ | |

$f(x)$ a un max en $x = -1$ et un min en $x = 1$.

c) Valeurs critiques : $f'(x) = 3(x-2)^2$. $f'(x) = 0 \iff 3(x-2)^2 = 0 \iff x = 2$. $f'(x)\nexists \iff x = 1$.

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | + | 0 | + | |
| | | ↗ | PS | ↗ | |

$f(x)$ a un point statitonnaire en $x = 2$.

d) Valeurs critiques : $f'(x) = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$. $f'(x) = 0 \iff \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2} = 0 \iff x = 0, 3/2$. $f'(x)\nexists \iff x = 1$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $3/2$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | - | 0 | - | ∄ | - | 0 | + | |
| | | ↘ | PS | ↘ | AV | ↘ | MIN | ↗ | |

$f(x)$ a un max en $x = -1$ et un min en $x = 1$.

### Question 6

Le domaine de la fonction est $[-\infty, 3]$.

La dérivée de la fonction est

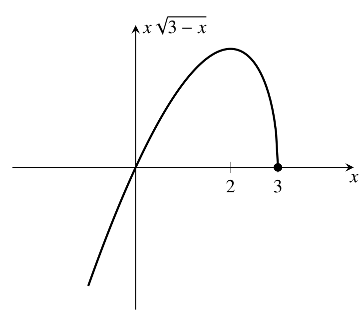
$$f'(x) = -\frac{3(x-2)}{2\sqrt{3-x}}.$$

Ses valeurs critiques sont

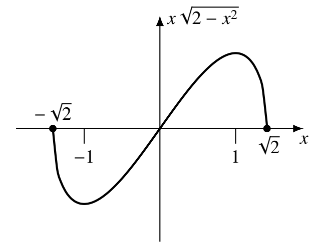
- $f'(x) = 0$ en $x = 2$
- $f'(x)\nexists$ pour $x \leq 3$.

Tableau de variation :

| $x$ | $-\infty$ | | 2 | | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | | $\infty$ |
| $f(x)$ | | ↗ | MAX | ↘ | TV |




### Question 7




### Question 8

Au sommet, on doit avoir que $y' = 0$. $y' = 2ax + b$, et donc $y' = 0$ quand $x = -b/2a$.

### Question 9

La croissance de $y$ est la plus rapide quand la dérivée est maximum, donc quand la dérivée de la dérivée, c'est à dire $y''$, est nulle. On calcule donc la dérivée seconde de $y$ et on détermine pour quelle valeur de $x$ on a que $y'' = 0$. La valeur cherchée est $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

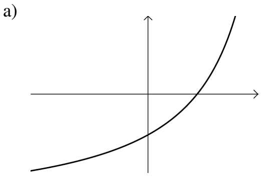
### Question 10

Comme la dérivée de $f$ est $f'(x) = 2013x^{2012} - 11x^{10} + 8x^7$, un polynôme de degré 2012, qui peut avoir au plus 2012 zéros, et que la dérivée a un zéro à chaque minimum ou maximum, la fonction $f$ a au plus 2012 minimums et maximums.

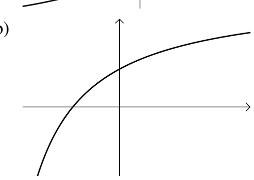
## Concavité et points d'inflexion

### Question 11

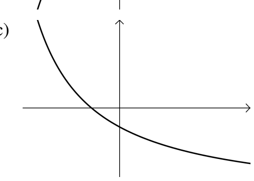
a)



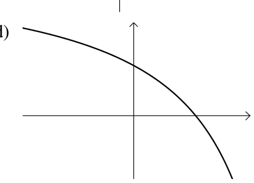
b)



c)



d)



### Question 12

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{dy}{dx}$ | + | - | - | 0 |
| $\frac{d^2y}{dx^2}$ | - | - | + | 0 |

**Question 13**

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{dy}{dx}$ | + | + | - | - |
| $\frac{d^2y}{dx^2}$ | + | - | - | 0 |

**Question 14**

a) $[-1, 4]$, et $[5, \infty[$
b) $]-\infty, -1]$ et $[4, 5]$
c) $]-\infty, 2[$ et $[5, \infty[$
d) $]2, 4]$
e) $x = 4$
f) $x = 1$ et $x = 5$
g) $x = 2$

**Question 15**

a) $[-4, -2[, ]-2, 2[$ et $[4, \infty[$
b) $]-\infty, -4]$ et $[2, 4]$
c) $]-\infty, -2[$
d) $]-2, 4]$ et $[4, \infty[$
e) $x = 2$
f) $x = -4$ et $x = 4$
g) Aucun point d'inflexion

**Question 16**

a) Concave vers le bas sur $\mathbb{R}$, aucun point d'inflexion.
b) Concave vers le haut sur $]-\infty, -1]$ et sur $[1, \infty[$, concave vers le bas sur$[-1, 1]$, points d'inflexion en $(-1, -2)$ et $(1, -2)$
c) Concave vers le haut sur $]-\infty, -1/3]$, concave vers le bas sur $[-1/3, \infty[$, point d'inflexion en $(-1/3, -7)$
d) Concave vers le haut sur $]-\infty, 4]$ et sur $[4, \infty[$, aucun point d'inflexion.++
e) Concave vers le haut sur $[1/3, 11/12]$, concave vers le bas sur $]-\infty, 1/3]$ et sur $[11/12, \infty[$, points d'inflexion en $(1/3, 0)$ et $(11/12, 25/4)$

**Question 17**

Le seul point critique de $f''$ est $x = 1$, où $f''(x)\nexists$. Le tableau des signes de $f''$ :

| $x$ | | -1 | |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | - | 0 | + |

La fonction est donc concave vers le bas sur $]-\infty, 1[$, concave vers le haut sur $]1, \infty[$, et elle a un point d'inflexion en $x = 1$.

**Question 18**

a) Minimum local en $(1/2, 3/4)$.
b) Minimum local en $(1/4, 63/8)$.
c) Aucun extremum local.
d) Minimum local en $(11, -847)$, maximum local en $(-1, 17)$
e) Minimums local en $(-\sqrt{3}, -8)$ et $(\sqrt{3}, -8)$, maximum local en $(0, 1)$
f) Minimum local en $(0, 0)$, maximum local en $(-2, -4)$

**Question 19**

a) Minimum = 9, maximum = 65.
b) Minimum = $\sqrt{3}$, maximum = $\sqrt{15}$.
c) Aucun extremum.
d) Minimum = -46, maximum = 1601.
e) Minimum = 1/19, maximum = 4.
f) Aucun extremum.
g) Minimum = -37, maximum = 88.
h) Aucun extremum.
i) Minimum = -80, maximum = 18.
j) Minimum = 8, aucun maximum.
k) Minimum = 0, aucun maximum.
l) Maximum = 1, aucun minimum.

**Question 20**

a) $x_1$ et $x_4$.
b) $x_3$ et $x_5$.
c) $x_2$ et $x_7$.
d) $x_4$ et $x_6$.
e) $f(0)$
f) $f(x_4)$
g) Aucun minimum absolu, maximum absolus en $x_3$.

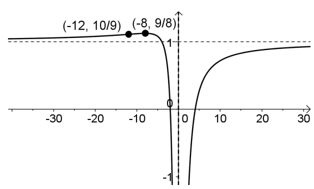
**Question 21**

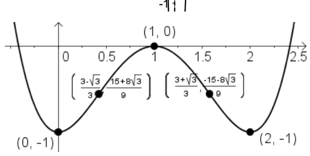
a) Croissante sur $]-\infty, -3]$ et sur $[2, \infty[$, décroissante sur $[-3, 2]$, maximum local en $(-3, 92)$, minimum local en $(2, -33)$.
b) Croissante sur $]-\infty, -2]$ et sur $[2, \infty[$, décroissante sur $[-2, 0[$ et sur $]0, 2]$, maximum local en $(-2, -7)$, minimum local en $(2, 9)$.
c) Croissante sur $]-\infty, -1[$, sur $]-1; 0,59]$ et sur $[1,70; \infty[$, décroissante sur $[0,59; 1[$ et sur $]1, 1,70]$, maximum local en $(0,59; -5,94)$, minimum local en $(1,70; -2,06)$.

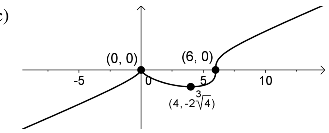
**Question 22**

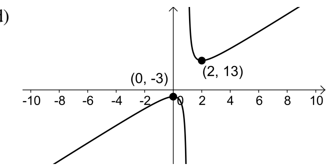
a) $[1/4, \infty[$
b) $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$
c) $\left[0, \sqrt{2}\right]$

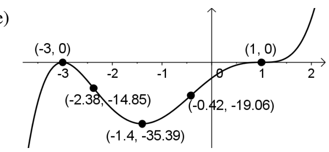
**Question 23**

a)



b)



c)



d)



e)



**Question 24**

a) Minimum local $(7, -392)$, maximum local $(-3, 108)$
b) Minimum local $(4, 8)$, maximum local $(-2, -4)$
c) Minimum local $(0, -1/2)$.

**Question 25**

a) Min = 237, max = 241.
b) Min = 1, max = 10
c) Max = 1/8, aucun min.

**Question 26**

a) Vrai
b) Faux, on peut prendre $f(x) = x$ et $g(x) = x$, toutes deux croissantes sur $\mathbb{R}$, mais telles que $f(x) \cdot g(x) = x^2$ ne l'est pas.
c) Vrai
d) Faux, on peut prendre $f(x) = \frac{1}{x^2}$ et $g(x) = x^2 - 1$, toutes deux concaves vers le haut sur $\mathbb{R}$, mais $f \cdot g(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ ne l'est pas.

**Question 27**

a) Montrer que l'équation $y'' = 0$ a une seule solution
b) Laissé à l'étudiant
c) Laissé à l'étudiant