Exercices sur la définition de dérivée avec limites – Calcul différentiel

Département de mathématiques – Cégep de Saint-Laurent
201-NYA – Automne 2019 – Professeur : Yannick Delbecque
http://prof.delbecque.org – prof@delbecque.org – Bureau C286 – 514-747-6521 poste 7289

Rappel

1. $\lim_{x\to a} Cf(x) = C\lim_{x\to a} f(x)$
2. $\lim_{x\to a} f(x)+g(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$
3. $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$
4. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$

si les limites des membres de droite existent.

Question 1
Déterminer le TVI $\frac{dy}{dx}$ des fonctions suivantes au point donné à l'aide de la définition de dérivée en terme de limites (sans utiliser les formules de dérivation).

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

a) $y = x^2$ quand $x = 2$.
b) $y = x^2 - 1$ quand $x = 2$.
c) $y = x^3$ quand $x = 2$.
d) $y = 3x$ quand $x = 2$.
e) $y = 2$ quand $x = 2$.
f) $y = \frac{1}{x}$ quand $x = 2$.
g) $y = \frac{3}{x^2}$ quand $x = 2$.
h) $y = x^2$ quand $x = a$.
i) $y = x^3$ quand $x = a$.
j) $y = \frac{1}{x}$ quand $x = a$.

Question 2
Déterminer $\frac{dy}{dx}$ à l'aide de la définition de dérivée en terme de limites.

a) si $y = x^4$
b) si $y = \frac{1}{x^2}$
c) si $y = \frac{x^2}{x+1}$
d) si $y = 1 - x^2$
e) si $y = x^2 + x + 1$
f) si $y = \sqrt{x-1}$

Question 3
Trouver la dérivée des fonctions suivantes en utilisant les deux formes de la définition en terme de limites.

a) $f(x) = x^2$
b) $f(x) = x^3$
c) $g(x) = \sqrt{x+3}$
d) $h(x) = \dfrac{x+3}{x+5}$
e) $f(x) = 2x^2 - x$.
f) $y = \sqrt{x^2+1}$.
g) $g(x) = \dfrac{2}{3x} - \dfrac{1}{3x^2}$.

Question 4
Démontrer que $\left(2x+1\right)' = 2$ à l'aide de la définition de dérivée et des propriétés des limites.

Question 5
Démontrer que si f est dérivable pour n'importe quelle valeur de x, alors $\left(2f(x)+1\right)' = 2f'(x)$ à l'aide de la définition de dérivée et des propriétés des limites.

Question 6
Démontrer que $\left((x+1)^2\right)' = 2(x+1)$ à l'aide de la définition de dérivée et des propriétés des limites.

Question 7 (10 points)
Démontrer à l'aide de la définition de la dérivée et des propriétés des limites que

$$\left(f(x) + Cx\right)' = f'(x) + C$$

pour une constante C quelconque et en supposant que la dérivée $f'(x)$ existe.

Question 8
Démontrer que si f est dérivable pour n'importe quelle valeur de x, alors $\left(f(x)^2\right)' = 2f(x)f'(x)$ à l'aide de la définition de dérivée et des propriétés des limites. (Difficile car il faut des trucs algébrique ! Le truc est dans la preuve de la dérive des fonctions composées (avec les limites !))

Question 9
Montrer que $f(x) = |2x-3|$ n'est pas dérivable en $x = 3/2$.

Question 10
Montrer que $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ n'est pas dérivable en $x = 0$.

Solutions

Question 1

a) 4	d) 3	g) $-\frac{3}{4}$	j) $-\frac{1}{a^2}$
b) 4	e) $0, y=2$	h) $2a$	
c) 12	f) $-\frac{1}{4}$	i) $3a^2$	

Question 2

a) $\frac{dy}{dx} = 4x^3$

b) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^3}$

c) $\frac{dy}{dx} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

d) $\frac{dy}{dx} = -2x$

e) $\frac{dy}{dx} = 2x+1$

f) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

Question 3

a) $f'(x) = 2x$

Forme 1 :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x^2+2x\Delta x+\Delta x^2)-x^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2x\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} 2x+\Delta x \\
&= 2x
\end{aligned}$$

Forme 2 :

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x+a}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} x+a \\
&= a+a \\
&= 2a
\end{aligned}$$

Donc $f(x) = 2x$.

b) $f'(x) = 3x^2$

c) $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$

d) $h'(x) = \frac{2}{(x+5)^2}$

e) $f'(x) = 4x-1$

f) $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

g) $g'(x) = \frac{-2}{3x^2} + \frac{2}{3x^3}$

Question 4

$$\begin{aligned}
\left(2x+1\right)' &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(2(x+\Delta x)+1)-(2x+1)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(2x+2\Delta x+1)-2x-1}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(2\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} 2 \\
&= 2
\end{aligned}$$

Question 5

$$\begin{aligned}
\left(2f(x)+1\right)' &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(2f(x+\Delta x)+1)-(2f(x)+1)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(2f(x+\Delta x)+1)-2f(x)-1}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(2f(x+\Delta x)-2f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} 2\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \\
&= 2\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \\
&= 2f'(x)
\end{aligned}$$

Question 6

$$\begin{aligned}
\left((x+1)^2\right)' &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{((x+\Delta x)+1)^2-(x+1)^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x^2+2x\Delta x+\Delta x^2+2(x+\Delta x)+1)-(x^2+2x+1)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{x^2+2x\Delta x+\Delta x^2+2x+2\Delta x+1-x^2-2x-1}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(2x+2)\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x(2(x+1)+\Delta x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} 2(x+1)+\Delta x \\
&= 2(x+1)
\end{aligned}$$

Question 7

$$\begin{aligned}
(f(x)+Cx)' &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)+C(x+\Delta x)-(f(x)+Cx)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)+C(x+\Delta x)-Cx)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} + \frac{C(x+\Delta x)-Cx}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} \frac{C(x+\Delta x)-Cx}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} C\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} C \\
&= f'(x)+C.
\end{aligned}$$

Question 8

$$\begin{aligned}
\left((f(x))^2\right)' &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(f(x+\Delta x))^2-(f(x))^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(f(x+\Delta x))^2-(f(x))^2}{\Delta x}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{f(x+\Delta x)-f(x)} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(f(x+\Delta x))^2-(f(x))^2}{f(x+\Delta x)-f(x)}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(f(x+\Delta x))^2-(f(x))^2}{f(x+\Delta x)-f(x)}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta y\to 0} \frac{(y+\Delta y)^2-y^2}{\Delta y} f'(x) \text{ En posant } y=f(x) \\
&= \lim_{\Delta y\to 0} \frac{y^2+2y\Delta y+\Delta y^2-y^2}{\Delta y} f'(x) \\
&= \lim_{\Delta y\to 0} \frac{2y\Delta y+\Delta y^2}{\Delta y} f'(x) \\
&= \lim_{\Delta y\to 0} (2y+\Delta y)f'(x) \\
&= 2yf'(x) \\
&= 2f(x)f'(x)
\end{aligned}$$

Note : en posant $y = f(x)$, $f(x+\Delta x) - f(x)$ est Δy. Comme f est dérivable, elle est aussi continue. Alors $\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x) - f(x) = 0$. On peut donc dire que $\Delta y \to 0$. Enfin, $f(x+\Delta x) = y + \Delta y$.

Question 9

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{|2(\frac{3}{2}+\Delta x)-3|-|2\frac{3}{2}-3|}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{|2\Delta x|-0}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{|2\Delta x|}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{2\Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0^+} 2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{|2(\frac{3}{2}+\Delta x)-3|-|2\frac{3}{2}-3|}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{|2\Delta x|-0}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{-2\Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0^-} -2 \\
&= -1
\end{aligned}$$

Comme les limites à droites et à gauche n'existent pas, la limite $\Delta x \to 0$ n'existe pas et la fonction f n'est pas dérivable en $x = 0$.

Question 10

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x\to 0^\pm} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0^\pm} \frac{\sqrt[3]{(0+\Delta x)^2} - \sqrt[3]{0}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0^\pm} \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0^\pm} \frac{\Delta x^{2/3}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0^\pm} \frac{1}{\Delta x^{1/3}} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0^\pm} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}} \\
&= \frac{1}{0^\pm} \\
&= \pm\infty
\end{aligned}$$

Comme $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \nexists$, la fonction f n'est donc pas dérivable en $x = 0$.