Exercices sur la définition de dérivée – Calcul différentiel

Département de mathématiques – Cégep de Saint-Laurent
201-NYA – Hiver 2019 – Professeur : Yannick Delbecque

Exercices préparatoires

Question 1
Utiliser le triangle de Pascal pour développer les polynômes suivants.

a) $(x+1)^3$
b) $(x-1)^3$
c) $(x+2)^5$
d) $(x+h)^4$
e) $(1-r)^6$
f) $(2x^2-3)^4$

Question 2
Mettre au dénominateur commun les fractions algébriques suivante. Simplifier le résultat.

a) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x}$
b) $\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{x+1}{(x-1)}$
c) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{(x-2)^2}$
d) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x^2(x-2)}$
e) $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{x^2}{(x-1)}$
f) $\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x+1}{(x^2+1)}$
g) $\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{x+1}{x-1}$
h) $\dfrac{x}{x^2+1}-\dfrac{x}{x^2+x+1}$

Question 3
Utilisez le conjugué pour éliminer les racines carrées au dénominateur ou au numérateur.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$
b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}$
c) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}$
d) $\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}$
e) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+3}$
f) $\dfrac{x}{\sqrt{x}-3}$
g) $\dfrac{x}{(2x+1)(\sqrt{x}-3)}$
h) $\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}+1}$
i) $\dfrac{\sqrt{3x-1}-\sqrt{x}}{2x-1}$

Question 4
Évaluer les expressions suivantes sans simplifier.

a) $f(2+\Delta x)$ si $f(x)=x^2$
b) $f(1+\Delta x)$ si $f(x)=\frac{1}{2}$
c) $f(1+\Delta x)$ si $f(x)=x^2+2x+1$
d) $f(-1+\Delta x)$ si $f(x)=\frac{1}{1+x}$
e) $f(3+\Delta x)$ si $f(x)=\sqrt{3+x}$
f) $f(2+\Delta x)$ si $f(x)=\frac{x+2}{x+1}$
g) $f(x+\Delta x)$ si $f(x)=x^3+1$
h) $f(x+\Delta x)$ si $f(x)=\frac{x}{x+1}$

Taux de variation moyen

Question 5
Déterminer les valeurs suivantes ; simplifier le résultat.

a) Δy si $f(x)=x^2$ et x varie de 0 à 5.
b) Δy si $f(x)=x^2$ et x varie de -2 à 2.
c) Δy si $f(x)=x^2$ et x varie de -3 à -2.
d) Δy si $f(x)=x^3$ et x varie de -2 à 3.
e) Δy si $f(x)=\frac{1}{x}$ et x varie de 1 à 3.
f) Δy si $f(x)=x^2$ et x varie de 0 à Δx.
g) Δy si $f(x)=x^2$ et x varie de 1 à $1+\Delta x$.
h) Δy si $f(x)=x^3$ et x varie de -2 à $-2+\Delta x$.
i) Δy si $f(x)=\frac{1}{x}$ et x varie de 1 à $1+\Delta x$.
j) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ si $f(x)=\dfrac{1}{x}$ quand x varie de 1 à 3.
k) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ si $f(x)=\dfrac{1}{x}$ quand x varie de 1 à $1+\Delta x$.
l) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ si $f(x)=x^2$ quand x varie de x à $x+\Delta x$.
m) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ si $f(x)=x^3$ quand x varie de x à $x+\Delta x$
n) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ si $f(x)=\dfrac{1}{x}$ quand x varie de x à $x+\Delta x$
o) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ si $f(x)=\sqrt{x}$ quand x varie de x à $x+\Delta x$

Question 6
Déterminer l'équation de la droite $y=ax+b$ qui passe par les points donnés. Faire une esquisse représentant la fonction et la droite.

a) $(1,f(1))$ et $(2,f(2))$ pour $f(x)=x^2$
b) $(0,f(0))$ et $(2,f(2))$ pour $f(x)=x^3$
c) $(1,f(1))$ et $(2,f(2))$ pour $f(x)=\frac{1}{x}$
d) $(1,f(1))$ et $(2,f(2))$ pour $f(x)=\sqrt{x}$
e) $(0,f(0))$ et $(\Delta x,f(\Delta x))$ pour $f(x)=x^3$
f) $(1,f(1))$ et $(1+\Delta x,f(1+\Delta x))$ pour $f(x)=x^2$

Question 7
Montrer que l'équation de la droite qui passe par les points $(a,f(a))$ et $(a+\Delta x),f(a+\Delta x)$ du graphe d'une fonction f est

$$y=f(a)+\frac{\Delta y}{\Delta x}(x-a).$$

Faire une esquisse représentant la situation.

Question 8
Soit la fonction définie par l'équation $y = x^3$. Calculer le taux de variation moyen $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sur l'intervalle demandé. Donner la valeur de Δx pour chacun des cas

a) $[2,4]$ b) $[2,3]$ c) $[2,2.1]$ d) $[2,2.01]$ e) $[2,2.001]$.

Question 9
Déterminer à l'aide des résultats de la question précédente vers quel nombre semble s'approcher le taux de variation de $y = x^3$ entre 2 et $2+\Delta x$ lorsque Δ devient infiniment petit ?

Question 10
Soit la fonction $f(x) = x^3 - x$. Calculer les taux de variation moyens suivants en simplifiant les fractions algébriques obtenues. L'identité algébrique suivante pourrait être utile : $A^3 - B^3 = (A-B)(A^2+AB+B^2)$.

a) $\mathrm{TVM}_{[2,4]}f(x)$. b) $\mathrm{TVM}_{[a,b]}f(x)$. c) $\mathrm{TVM}_{[x,x+\Delta x]}f(x)$.

Question 11
Loi de refroidissement (ou du réchauffement) de Newton : si T est la température d'un objet, A la température ambiante et t le temps écoulé, le taux de variation $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ de la température par rapport au temps est proportionnel à la différence entre la température de l'objet et la température ambiante :

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = C(T-A)$$

où C est la constante de proportionnalité (qui dépend du système).

Après la chute de météorites survenue sur la ville de Tcheliabinsk en Russie en février 2013, des chercheurs s'apprêtent à récupérer des fragments de la météorite dans la zone sinistrée.

Les chercheurs sont arrivés sur le site à 14 h et ont remarqué que la température d'un fragment était de 140°C. Deux heures plus tard, la température a chuté de 50°C.

Sachant que la température ce jour là était de -10°C et que la météorite a touché le sol à 10 h, déterminer la température du fragment au moment précis où la météorite a touché le sol.

Taux de variation instantané

Question 12
Déterminer le TVI $\frac{dy}{dx}$ des fonctions suivantes au point donné (sans utiliser les formules de dérivation). Déterminer l'équation de la droite tangente au graphe de f à ce point.

a) $y = x^2$ quand $x = 2$.
b) $y = x^2 - 1$ quand $x = 2$.
c) $y = x^3$ quand $x = 2$.
d) $y = 3x$ quand $x = 2$.
e) $y = 2$ quand $x = 2$.
f) $y = \frac{1}{x}$ quand $x = 2$.
g) $y = \frac{3}{x^2}$ quand $x = 2$.
h) $y = x^2$ quand $x = a$.
i) $y = x^3$ quand $x = a$.
j) $y = \frac{1}{x}$ quand $x = a$.

Question 13
Déterminer laquelle des deux fonctions suivantes croit le plus rapidement en $x = 1$:

$$f(x) = x^2 \text{ ou } f(x) = -\frac{1}{x}?$$

Question 14
La fonction donnant l'aire d'un cercle (en centimètres carrés) par rapport à son rayon (en centimètres) est $A(r) = \pi r^2$

a) Quelle est la variation de l'aire du cercle si le rayon passe de 2 cm à 4 cm ?
b) Quelle est le taux de variation moyen de l'aire du cercle si le rayon passe de 2 cm à 4 cm ?
c) Quelle est le taux de variation instantané de l'aire du cercle lorsque le rayon est de 4 cm ?

Différentielles et fonctions dérivées

Question 15
Déterminer la fonction dérivée $\frac{dy}{dx}$ à l'aide de la définition.

a) si $y = x^4$
b) si $y = \frac{1}{x^2}$
c) si $y = \frac{x^2}{x+1}$
d) si $y = 1 - x^2$
e) si $y = x^2 + x + 1$
f) si $y = \sqrt{x-1}$

Question 16
En utilisant les résultats de la question précédente et le fait que

$$dy = \frac{dy}{dx}dx,$$

déterminer l'erreur absolue sur y pour $x = 2$ et $x = 10$ si l'erreur en x est 0.1. Pour laquelle des deux valeurs de x l'erreur en y est-elle la plus grande ?

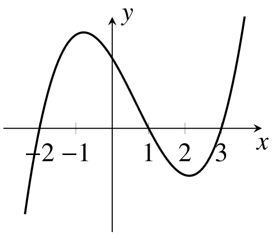
a) si $y = x^4$
b) si $y = \frac{1}{x^2}$
c) si $y = \frac{x^2}{x+1}$
d) si $y = 1 - x^2$
e) si $y = x^2 + x + 1$
f) si $y = \sqrt{x-1}$

Question 17
Trouver la dérivée des fonctions suivantes en utilisant la définition.

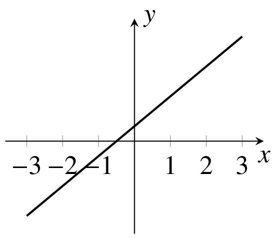
a) $f(x) = x^2$
b) $f(x) = x^3$
c) $g(x) = \sqrt{x+3}$
d) $h(x) = \dfrac{x+3}{x+5}$
e) $f(x) = 2x^2 - x$; $f'(2)$.
f) $x(t) = at^2 + bt + c$; $\dfrac{dx}{dt}$.
g) $y = \sqrt{x^2+1}$; $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=-1}$.
h) $g(x) = \dfrac{2}{3x} - \dfrac{1}{3x^2}$; $g'(x)$.

Question 18
Associer chacune des fonctions suivantes (à gauche) à sa dérivée (à droite).

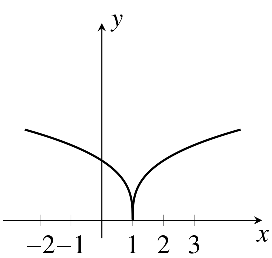
a)



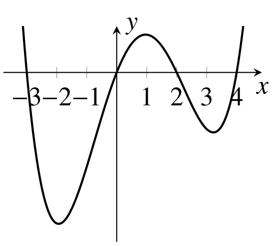
b)



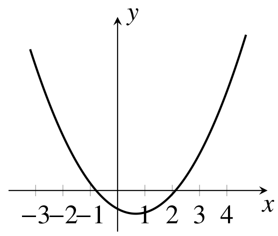
c)



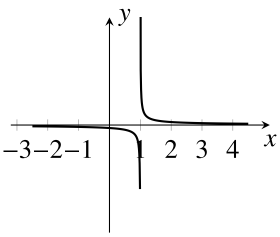
d)



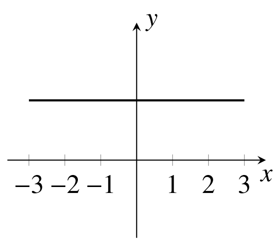
i)



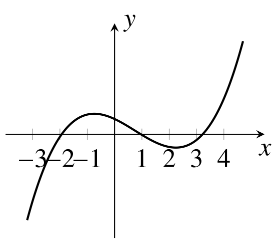
ii)



iii)



iv)



Question 19
Dans les questions précédentes, on a déterminé que la dérivée de $y = x^3$ est $y' = 3x^2$. Utilisez la relation entre dy et dx

$$dy = f(x+dx) - f(x)$$

pour approximer $(1.1)^3$. (Ind. décomposer 1.1 en $x+dx$ avec $x = 1$ et $dx = 0.1$ pour déterminer $f(x+dx) = f(x)+dy$.

Solutions

Question 1

a) x^3+3x^2+3x+1.

b) x^3-3x^2+3x-1.

c) $x^5+10x^4+40x^3+80x^2+80x+32$.

d) $x^4+4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4$.

e) $r^6-6r^5+15r^4-20r^3+15r^2-6r+1$.

f) $16x^8-96x^6+216x^4-216x^2+81$.

Question 2

a) $\frac{2(x-1)}{x(x-2)}$.

b) $-\frac{3x+1}{(x-1)(x+1)}$.

c) $\frac{(x-1)}{(x-2)^2}$.

d) $\frac{(x^2+1)}{x^2(x-2)}$.

e) $\frac{x(x^2-x-1)}{(x-1)(x-2)}$.

f) $\frac{x(x+1)^2}{(x^2+1)(x-1)}$.

g) $\frac{x^2+2x+2}{(x-1)(x+1)}$.

h) $\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$.

Question 3

a) $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{x-2)}$.

b) $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{2-x)}$.

c) $\frac{\sqrt{x}+2}{x-4)}$.

d) $\frac{1+\sqrt{x}}{1-x)}$.

e) $\frac{\sqrt{x}-3}{x-9)}$.

f) $\frac{x(\sqrt{x}+3)}{x-9)}$.

g) $\frac{x(\sqrt{x}+3)}{(2x+1)(x-9)}$.

h) $\frac{\sqrt{2x+1}-1}{2x}$.

i) $\frac{1}{\sqrt{3x-1}+\sqrt{x}}$.

Question 4

a) $(2+\Delta x)^2$

b) $\frac{1}{2}$

c) $(1+\Delta x)^2+2(1+\Delta x)+1$

d) $\frac{1}{1+(-1+\Delta x)}$

e) $\sqrt{3+(3+\Delta x)}$

f) $\frac{(2+\Delta x)+2}{(2+\Delta x)+1}$

g) $(x+\Delta x)^3+1$

h) $\frac{(x+\Delta x)}{(x+\Delta x)+1}$

Question 5

a) $\Delta y = 25$

b) $\Delta y = 0$

c) $\Delta y = -5$

d) $\Delta y = 35$

e) $\Delta y = -2/3$

f) $\Delta y = \Delta x^2$

g) $\Delta y = (1+\Delta x)^2$-1

h) $\Delta y = (-2+\Delta x)^3-8$

i) $\Delta y = \frac{1}{1+\Delta x}-1$

j) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1/3-1/1}{2} = -\frac{1}{3}$

k) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{1+\Delta x}-1}{\Delta x}$

l) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}$

m)
$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}\\ &= \frac{x^3+x^2\Delta x+x\Delta x^2+\Delta x^3-x^3}{\Delta x}\\ &= \frac{x^2\Delta x+x\Delta x^2+\Delta x^3}{\Delta x}\\ &= \frac{\Delta x(x^2\Delta x+x\Delta x^2+\Delta x^3)}{\Delta x}\\ &= x^2\Delta x+x\Delta x^2+\Delta x^3\end{aligned}$$

n) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}}{\Delta x}$

o) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$

Question 6

a) $y = 3x-2$

b) $y = 4x$

c) $y = -\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

d) $(\sqrt{2}-1)x-(\sqrt{2}+2)$

e) $x\Delta x^2$

f) $y = \frac{(1+\Delta x)^2}{\Delta x}x + \left((1-\frac{(1+\Delta x)^2}{\Delta x}\right)$

Question 7

On peut faire la démonstration de différentes manières. Montrons que que la droite définie par l'équation donnée passe par les deux points donnés. En $(a, f(a))$, on a que

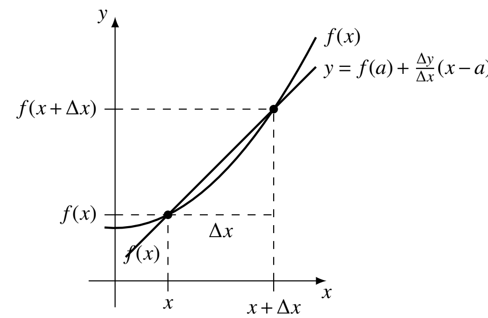
$$\begin{aligned} y &= f(a)+\frac{\Delta y}{\Delta x}(x-a)\\ f(a) &= f(a)+\frac{\Delta y}{\Delta x}(a-a)\\ f(a) &= f(a)\end{aligned}$$

L'équation de la droite est donc satisfaite en ce point.

Au point $(a+\Delta x, f(a+\Delta x))$, on a que

$$\begin{aligned} y &= f(a)+\frac{\Delta y}{\Delta x}(x-a)\\ f(a+\Delta x) &= f(a)+\frac{\Delta y}{\Delta x}((a+\Delta x)-a)\\ f(a+\Delta x) &= f(a)+\frac{\Delta y}{\Delta x}\Delta x\\ f(a+\Delta x) &= f(a)+\Delta y\\ f(a+\Delta x) &= f(a)+(f(a+\Delta x)-f(a))\\ f(a+\Delta x) &= f(a+\Delta x)\end{aligned}$$

L'équation de la droite est donc aussi satisfaite pour l'autre point. Ainsi, comme la droite passe par les deux points donnés, c'est bien l'équation de la droite cherchée.



Question 8

a) $\frac{4^3-2^3}{4-2} = 28$, $\Delta x = 2$

b) 19, $\Delta x = 1$

c) 12.61, $\Delta x = 0.1$

d) 12.0601, $\Delta x = 0.01$

e) 12.006001, $\Delta x = 0.001$

Question 9

12

Question 10

a) 27

b) $\frac{b^3-b-\left(a^3-a\right)}{b-a} = b^2+ab+a^2-1$

c) $\frac{(x+\Delta x)^3-(x+\Delta x)-\left(x^3-x\right)}{\Delta x}$
$= 3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2-1$

Question 11

$$\begin{aligned}\frac{\Delta T}{\Delta t} &= C(T-A)\\ \frac{90}{2} &= C(140-(-10))\\ 45 &= C(150)\\ C &= \frac{45}{150} = \frac{3}{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta T}{\Delta t} &= \frac{3}{10}(T+10)\\ \Delta T &= \frac{3}{10}(T+10)\Delta t\\ \Delta T &= \frac{3}{10}(140+10)(10-14)\\ \Delta T &= \frac{3}{10}(150)(-4) = -180\\ \Delta T &= T_{\text{fin}}-T_{\text{ini}}\\ T_{\text{ini}} &= T_{\text{fin}}-\Delta T = 140-(-180) = 320.\end{aligned}$$

Question 12

a) 4, $y = 4x-4$

b) 4, $y = 4x-5$

c) 12, $y = 12x-16$

d) 3, $y = 3x$

e) 0, $y = 2$

f) $-\frac{1}{4}$, $y = -\frac{x}{4}+1$

g) $-\frac{3}{4}$, $y = -\frac{3x}{8}x+\frac{9}{4}$

h) $2a$, $y = 2ax-a^2$

i) $3a^2$ $y = 3a^3x-2a^3$

j) $-\frac{1}{a^2}$ $y = -\frac{x}{a^2}+\frac{2}{a}$

Question 13

$\text{TVI}_f(1) = 2$, $\text{TVI}_g(1) = 1$, la fonction f croit donc plus rapidement que g en $x = 1$.

Question 14

a) 12π cm^2 b) 6π cm c) 8π cm

Question 15

a) $\frac{dy}{dx} = 4x^3$
b) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^3}$
c) $\frac{dy}{dx} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$
d) $\frac{dy}{dx} = -2x$
e) $\frac{dy}{dx} = 2x+1$
f) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

Question 16

a) $|dy| = 3.2\,;\,|dy| = 400$
b) $|dy| = 0.025\,;\,|dy| = 0.0002$
c) $|dy| \approx 0.089\,;\,|dy| \approx 0.0991$
d) $|dy| = 0.4\,;\,|dy| = 2$
e) $|dy| = 0.5\,;\,|dy| = 2.1$
f) $|dy| = 0.05\,;\,|dy| \approx 0.1667$

Question 17

a) $f'(x) = 2x$
b) $f'(x) = 3x^2$
c) $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}$
d) $h'(x) = \dfrac{2}{(x+5)^2}$
e) 7
f) $2at+b$
g) -2
h) $g'(x) = \frac{-2}{3x^2} + \frac{2}{3x^3}$

Question 18

a) i)
b) iii)
c) ii)
d) iv)

Question 19

On a que $dy = 3x^2\,dx$. Donc si $x = 1$ et $dx = 0,1$, on a que

$$dy = 3(1)^2(0,1) = 0,3.$$

Comme $dy = f(x+dx) - f(x)$, on a que $f(x+dx) = f(x) + dy$. On utilise cette dernière égalité pour approximer $f(x+dx)$.

$$\begin{aligned} f(1,1) &= f(1+0,1) \\ &\approx f(1) + 0,3 \\ &= 1^3 + 0,03 \\ &= 1,03. \end{aligned}$$