Exercices de révision

Calcul différentiel – Automne 2019 – Yannick Delbecque

Notation, logique, nombres

Question 1
Donner la contraposée des énoncés suivants.

a) « si $x \in \mathbb{Z}$, alors $x \in \mathbb{Q}$ »
b) « Si une fonction f est continue en $x = a$, alors $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. »
c) « Quand la fenêtre est ouverte, la pluie entre dans le salon. »
d) « Si j'ai mes souliers, je n'ai pas mal aux pied en marchant »
e) « Si X est humain, alors X est mortel. »
f) « Tous les fruits sont des légumes. »
g) « Si n est pair, alors $n+1$ est impair. »

Question 2
Démontrer les énoncés suivants, ou donner un contre exemple pour montrer qu'ils sont faux.

a) « La somme de deux multiples de 3 est aussi un multiple de 3 ».
b) « Le cube d'un nombre pair est pair. »
c) « La somme d'un nombre entier et d'un nombre rationnel est un nombre entier. »
d) « La somme de deux nombres rationnels est un nombre rationnel »

Question 3
Mettre les nombres périodiques $0.\overline{123}$ et $2.\overline{18}$ sous forme de fractions.

Question 4 (Défi difficile)
Démontrer que $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre rationnel en utilisant le lemme suivant (qu'il n'est pas nécessaire de prouver) :

n est un multiple de 3 ssi n^2 est un multiple de trois.

Indice : s'inspirer de la preuve vue en classe pour $\sqrt{2}$.

Question 5 (Défi difficile)
Démontrer que $\log_2(3)$ n'est pas un nombre rationnel en utilisant le fait que la décomposition en facteurs premiers est unique. Indice : s'inspirer (un peu moins) de la preuve vue en classe pour $\sqrt{2}$.

Question 6
(Défi difficile utilisant le principe d'induction). Prouver que tout les nombres entiers de la forme $3^k - 1$ (avec $k \geq 1$) sont des nombres pairs.

Question 7
Effectuer les opérations suivantes.

a) $\{1, \pi, 2\pi\} \cup \{1, 2, 3, 4\}$
b) $\{1, \pi, 2\pi, 3\} \cap \{1, 2, 3, 4\}$
c) $\{1, \pi, 4, 5\} \setminus \{1, 2, 3, 4\}$
d) $[2,5] \cup]4,8]$
e) $[2,5] \cap]4,8]$
f) $[2,5] \setminus]4,8]$
g) $\mathbb{N} \cap [0.5, \pi]$
h) $\mathbb{Q} \cap \{0.5, \pi, 3.14159, e, \sqrt{2}, 3/5\}$
i) $\{0.5, \pi, 3.14159, e, \sqrt{2}, 3/5\} \setminus Q$

Question 8
Décrire les ensembles suivants à l'aide d'intervalles

a) $\{x \mid x \geq -3 \text{ et } x < \pi\}$
b) $\{x \mid x - 2 < 5\}$
c) $\{x \mid x < 3 \text{ et } 0 < x \text{ et } x \leq 1/2\}$
d) $\{x \mid x^2 < 4\}$

Exposants et logarithmes

Question 9
Simplifier et réécrire les expressions suivantes pour que le résultat n'ai aucun exposant fractionnaire ou négatif.

a) 2^{-3}
b) $2^{1/2}$
c) $3^{-1/3}$
d) $5^{-2/3}$
e) $\left(2^{1/2}\right)^3$
f) $2^{1/2}2^{-5/2}$
g) $(2^{1/2} + 3^{1/2})^{-2}$
h) $\log_2(2^{-5})$
i) $2^{\log_2(3)}$
j) $\log_2(2^{1/2})$
k) $3\log_2(2^{1/3})$

Question 10
Mettre les expressions suivantes sous la forme

$$C(x-a)^b$$

où a et b et C sont des nombres réels.

a) $\dfrac{1}{x^3}$
b) $\dfrac{2}{x^3}$
c) $\dfrac{2}{3x^5}$
d) $\dfrac{1}{(x-3)^2}$
e) $\dfrac{7}{(x+1)^6}$
f) $\sqrt{x}$
g) $\sqrt[3]{x-2}$
h) $\dfrac{\sqrt[4]{x+2}}{5}$
i) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
j) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$
k) $\dfrac{2}{3\sqrt[5]{x}}$
l) $\sqrt{x^3}$
m) $\sqrt[4]{(x-3)^5}$
n) $\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$
o) $\dfrac{4}{3\sqrt[5]{x^4}}$
p) $(2x-3)^2$
q) $(2x)^3$
r) $(2x-1)^3$
s) $\sqrt{4x-1}$
t) $\dfrac{(x-2)^2}{\sqrt{x-2}}$
u) $\dfrac{3(x+1)}{4\sqrt[3]{x+1}}$
v) $\dfrac{2\sqrt[5]{x+1}}{5\sqrt{x+1}}$

Droites

Question 11
Déterminer la pente et l'ordonnée à l'origine des droites suivantes.

a) La droite d'équation $3x+2y=1$.

b) La droite d'équation $\frac{x}{5}+\frac{2y}{3}=1$.

c) La droite d'équation $y=-3(x-2)+1$

d) La droite d'équation $\sqrt{2}x+\log_2(3)y=\sqrt{3}$

Question 12
Donner l'équation de la droite…

a) de pente -5 qui passe par le point $(-3,4)$;

b) passant par les points $(-2,4)$ et $(1,-5)$;

c) parallèle à la droite trouvée en a) qui passe par le point $(1,-2)$.

Paraboles

Question 13
Trouver les zéros de chacune des fonctions polynomiales ci-dessous en factorisant.

a) $f(x)=x^2+7x+12$

b) $f(x)=9-4x^2$

c) $f(x)=3x^2+5x$

d) $f(x)=-x^2-100$

Question 14
Utiliser la formule quadratique pour trouver les zéros de chacune des fonctions suivantes.

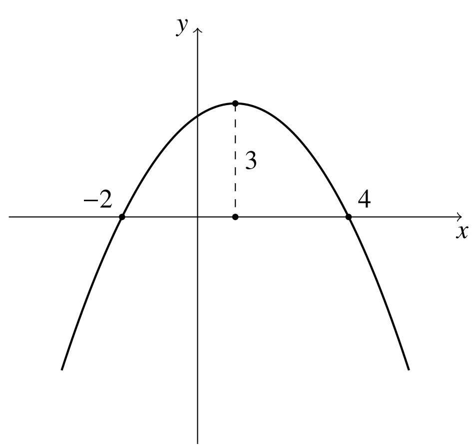
a) $f(x)=-3x^2+2x-6$

b) $f(x)=6x^2-17x+12$

c) $f(x)=x^2+11$

d) $f(x)=9x^2-6x+1$

Question 15
Déterminer quelle fonction quadratique de la forme $f(x)=ax^2+bx+c$ est illustrée dans le graphe suivant.



Polynômes

Question 16
Factoriser complètement les polynômes suivants.

a) $4x^3-3x^2+4x-3$

b) x^2+5x+6

c) $9x^2+12x+4$

d) $16x^2-81$

e) x^2+25

f) $3x^3-108x$

g) $18x^5+32x^3$

h) x^4-5x^2+4

Question 17
Trouver les zéros des fonctions polynomiales et rationnelles suivantes.

a) $f(x)=4x-3$

b) $f(x)=2$

c) $f(x)=2x^2-5x+2$

d) $f(x)=(x-1)(x+1)$

e) $f(x)=x(x-1)\left(x+\sqrt{2}\right)$

f) $f(x)=\dfrac{(x-2)(x+1)}{x^2+3}$

Question 18
Effectuer les divisions polynomiales suivantes.

a) $\dfrac{x^2-1}{x-1}$

b) $\dfrac{x^2-1}{x+1}$

c) $\dfrac{x^2+1}{x-1}$

d) $\dfrac{x^3-1}{x-1}$

e) $\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

f) $\dfrac{x^4-x^3-2x^2+3x-1}{x-1}$

g) $\dfrac{x^5+x^4+2x^3+2x^2+x+2}{x+1}$

Question 19
Le polynôme $P(x)=x^3-4x^2+8x-15$ peut également s'écrire de la manière suivante.

$$P(x)=(x-3)\left(x^2-x+5\right)$$

a) Peut-on le factoriser davantage ? Expliquer.

b) Vérifier que $x=3$ est un zéro de $P(x)$ dans les deux formes données dans la question.

c) Trouver, s'il y en a, d'autres valeurs de x pour lesquelles $P(x)=0$.

Question 20
Soit le polynôme $P(x)=x^4-5x^3-8x^2-24$.

a) Sans effectuer de division, dire si $(x-2)$ est un facteur de $P(x)$.

b) Est-ce que $(x+2)$ divise $P(x)$?

Question 21
Soit le polynôme $P(x) = x^4 + 3x^2 + 2$.

a) Ce polynôme a-t-il des zéros ?
b) Existe-t-il une factorisation pour de $P(x)$?
c) Cela contredit-il le théorème de factorisation ? Expliquer.

Fonctions

Question 22
Substituer (sans simplifier)...

a) y à x dans x^2+3x+4
b) $y+1$ à x dans x^2+3x+4
c) $y+h$ à x dans x^2+3x+4
d) x^2 à x dans x^2+3x+4
e) $x+\Delta x$ à x dans x^2+3x+4
f) $x+\Delta x$ à x dans $\dfrac{1}{x^2+1}$
g) $x+\Delta x$ à x dans $\dfrac{1}{(x+1)^2}$

Question 23
Évaluer...

a) $f(3)$ si $f(x) = x^3$
b) $f(1)$ si $f(x) = x^{3/2}$
c) $f(9)$ si $f(x) = x^{3/2}$
d) $f\left(\sqrt[3]{2}\right)$ si $f(x) = x^{3/2}$
e) $f(2)$ si $f(x) = 2^{2/3}x^{1/3}$
f) $f(1+h)$ si $f(x) = x^2$
g) $f(3+\Delta x)$ si $f(x) = x^3$
h) $f(y)$ si $f(x) = \sqrt{x^2+1}$
i) $f(y+\Delta x)$ si $f(x) = \frac{1}{x}$
j) $f(1)$ si $f(x) = x^{5/2}$
k) $f(x+\Delta x)$ si $f(x) = x^{5/2}$
l) $f(2)$ si $f(x) = \log(x-1)$
m) $f(0)$ si $f(x) = 2^{(x-1)}$
n) $f(-1)$ si $f(x) = \frac{1}{x+1}$
o) $f(1)$ si $f(x) = 2^{(x-1)}$
p) $f(x+\Delta x)$ si $f(x) = x-1$
q) $f(x+\Delta x)$ si $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - 1$
r) $f(x+\Delta x)$ si $f(x) = (x+1)^2 - x$

Question 24
Considérons les fonctions définie par $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2$ et $h(x) = \frac{1}{x+1}$. Évaluer les expressions suivantes.

a) $3f(x) - 5$
b) $f(3x-5)$
c) $f(x) + h(x)$
d) $f(x)g(x)$
e) $f(g(x))$
f) $g(f(x))$
g) $[f\circ g\circ h](x)$
h) $[h\circ g\circ f](x)$
i) $[g\circ h\circ f](x)$

Question 25
Soit la fonction définie par $f(x) = x^3 - 4x$.

a) Donner l'équation de la droite passant par $(-1, f(-1))$ et $(2, f(2))$
b) Vérifier que le point $(1,-3)$ sont sur le graphe de f
c) Donner l'équation de la droite passant par $(1,-3)$ et $(2, f(2))$

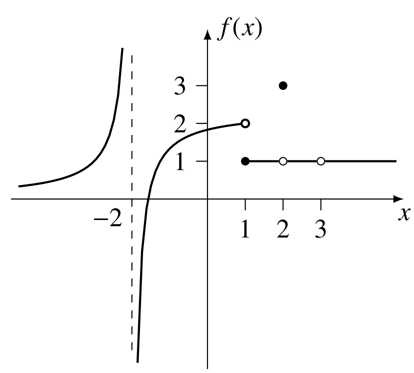
Question 26
Faire une esquisse du graphe des fonctions suivantes.

a) $f(x) = (x-2)^2 + 1$
b) $f(x) = \frac{1}{x+2} - 1$
c) $f(x) = -\left(x+\sqrt{3}\right)^2 + 2\sqrt{2}$
d) $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$

Question 27
Déterminer lesquelles des équations suivantes définissent des fonctions si on considère x comme variable indépendante et y comme variable dépendante. Si l'équation donnée défini une fonction, donner la règle de correspondance et son domaine de définition.

a) $yx = 1$
b) $x+y = 1$
c) $x^2+y^2 = 1$
d) $x^3+y^3 = 0$
e) $2^x = y^2$
f) $2^y = x^2$
g) $2x^2 - y + 8 = 3x$
h) $\dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{x^2}$
i) $\sin(y) = x$
j) $\sin(x) = 3y+2$

Question 28
Soit f la fonction ayant le graphe suivant. Évaluer f pour les valeurs de x données.



a) $x=-2$
b) $x=1$
c) $x=3/2$
d) $x=2$
e) $x=3$
f) $x=\pi$

Question 29
Soit f la fonction définie de la manière suivante.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < -2 \\ -x & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

a) Évaluer $f(-3)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(1/2)$, $f(1)$, $f(2)$.

b) Quel est le domaine de f ?

Question 30
Soit f la fonction définie de la manière suivante.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } x \leq 2 \\ x & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

a) Évaluer $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$.

b) Quel est le domaine de f ?

Question 31
La fonction *valeur absolue* est la fonction définie de la manière suivante.

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$

a) Évaluer $|-3|$, $|0|$, $|2|$.

b) Quel est le domaine de la fonction valeur absolue ?

c) Est-ce que la fonction valeur absolue admet une fonction inverse ?

d) Montrer que $|x| = \sqrt{x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. (ind. Séparer le raisonnement en deux cas : $x \geq 0$ et $x < 0$.)

e) Montrer que $|ab| = |a||b|$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$. (Ind. Utiliser le résultat précédent).

Question 32
Déterminer si les fonctions f et g suivantes sont des fonctions inverses une de l'autre.

a) $f(x) = 2x - 3$ et $g(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{2}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ et $g(x) = x^3 - 1$

c) $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x-2}$ et $g(x) = \dfrac{2x+1}{3x-2}$

Question 33
Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes.

a) $f(x) = x^{100} + x^{50} + 1$

b) $f(x) = \dfrac{1}{2x-3}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)(x+2)}$

d) $f(x) = \dfrac{3x-1}{2x+5}$

e) $f(x) = \dfrac{2}{x^2-16}$

f) $f(x) = \dfrac{3}{(x-4)^2}$

g) $f(x) = \dfrac{2x^2-3x-5}{x^2-x-2}$

h) $f(x) = \sqrt{x-1}$

i) $f(x) = \sqrt{2x-5}$

j) $f(x) = \sqrt{x^3}$

k) $f(x) = \sqrt{(x-1)^3}$

l) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

m) $f(x) = \sqrt{(x^2+1)}$

n) $f(x) = \dfrac{-x+2}{x^3-x^2+5x}$

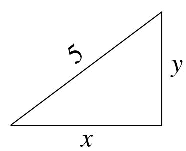
o) $f(x) = |x^3-1|$

p) $f(x) = \dfrac{1}{|x-1|}$

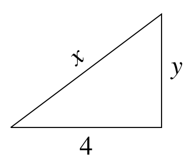
q) $f(x) = \dfrac{1}{|x|-1}$

r) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x-5}}$

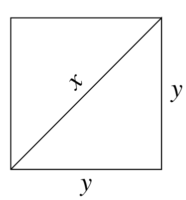
Question 34
Exprimer algébriquement la variable dépendante en fonction de la variable indépendante en utilisant les relations géométrique déterminée par les figures suivantes. Note : considérez tout les angles en radians et que les longueurs sont positives. Toutes les dimensions autres que indépendante et dépendante sont considérées comme des constantes.

a)


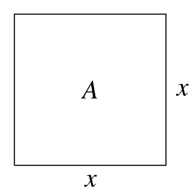
Variable dépendante y, variable indépendante x.

b)


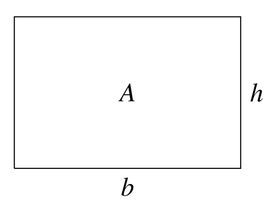
Variable dépendante y, variable indépendante x.

c)


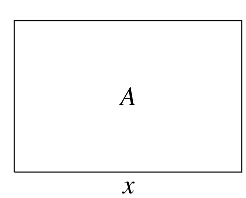
Variable dépendante y, variable indépendante x.

d)


Variable dépendante x (côté), variable indépendante A (aire).

e)


Variable dépendante b (côté), variable indépendante A (aire).

f)


Périmètre fixe = 10.
Variable dépendante A (aire), variable indépendante b (côté)

Question 35

Déterminer les points de croisement avec les axes des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \sqrt{x^2-4}$

b) $f(x) = \left(x - 3\sqrt{3}\right)^{2/3}$

c) $f(x) = \sqrt{-x^2+3x+4}$

d) $f(x) = x^4 - 16$

e) $f(x) = x^3 + 27$

f) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}$

Question 36

Quelle est la pente de la droite passant par les points correspondants aux valeurs $x = 2$ et $x = 3$ du graphe de la fonction $f(x) = x^3$?

Question 37

Quelle est la pente de la droite passant par les points correspondants aux valeurs $x = 2$ et $x = 2 + \Delta x$ du graphe de la fonction $f(x) = x^2$?

Solutions

Question 1

a) si $x \notin \mathbb{Q}$, alors $x \notin \mathbb{Z}$

b) Si $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, alors f n'est pas continue en $x = a$.

c) Si la pluie n'entre pas dans le salon, alors la fenêtre est fermée.

d) Si j'ai mal au pieds en marchant, alors je n'ai pas mes souliers.

e) Si X n'est pas mortel, alors X n'est pas humain.

f) Si ce n'est pas un légume, ce n'est pas un fruit.

g) Si $n+1$ est pair, alors n est impair.

Question 2

a) Soient $a = 3k$ et $b = 3l$ ($k, l \in \mathbb{Z}$) deux multiples de 3 quelconques. Leur somme est
$$a + b = 3k + 3l = 3(k+l).$$
Comme $k+l$ est un nombre entier, $3(k+l)$ est un multiple de 3.

b) Soit $a = 2k$ (avec k un nombre entier) un nombre pair quelconque. Son cube est
$$a^3 = (2k)^3 = 2^3k^3 = 2(2^2k^3),$$
ce qui est aussi un multiple de 2 car $2^2k^3 \in \mathbb{Z}$.

c) Faux. Contre-exemple : la somme de 1 et $1/2$ est $3/2$, qui n'est pas un nombre entier.

d) Soit deux nombre rationnels quelconques $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ (donc avec a, b, c et d de nombres entiers et $b, d \neq 0$). Leur somme est
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}.$$
Comme $ad + bc$ et bd sont des sommes et produits de nombres entiers, ces deux nombres sont aussi entiers. De plus, $bd \neq 0$ car b et d sont non-nuls. On peut dont conclure que $\frac{ad+bc}{db}$ est un nombre rationnel.

Question 3

Soit
$$x = 0.\overline{123}.$$
On multiplie par 1000 pour obtenir
$$1000x = 123.\overline{123}.$$
En soustrayant $1000x - x$, on obtient
$$999x = 123$$
et donc
$$x = \frac{123}{999} = \frac{41}{333}.$$
Soit
$$y = 2.\overline{18}.$$
On multiplie par 100 pour obtenir
$$100y = 218.\overline{18}.$$
En soustrayant $100y - y$, on obtient
$$99x = 216$$
et donc
$$x = \frac{216}{99} = 2411.$$

Question 4

Si $\sqrt{3}$ est un nombre rationnel, il peut s'écrire sous la forme d'une fraction simplifiée :
$$\sqrt{3} = \frac{m}{n}.$$
En multipliant par n et en prenant le carré, on obtient
$$3n^2 = m^2.$$
m^2 est donc un multiple de trois, et donc m aussi (par le lemme donné). Si $m = 3k$, on a en substituant $3k$ à n dans la dernière équation, on obtient l'égalité
$$3n^2 = 9k^2.$$
En divisant par 3, on obtient
$$n^2 = 3k^2.$$
Cette fois-ci, n^2 est un multiple de 3, et donc n est aussi un multiple de 3.

Question 5

Si $\log_2(3)$ est une faction, on peut l'écrire comme un fraction déjà simplifiée
$$\log_2(3) = \frac{m}{n}.$$
Par définition des logarithmes, cela est équivalant à dire que
$$3 = 2^{m/n}.$$
En prenant la puissance n de chaque membre de l'égalité et en simplifiant les exposants avec les propriétés des exposants, on obtient
$$3^n = 2^m.$$
Comme 2 et 3 sont des nombres premiers et que la décomposition en facteurs premiers est unique, il est impossible qu'une puissance de 2 soit aussi une puissance de 3 (sans quoi on aurait deux décompositions différentes en facteurs premiers pour un même nombre !). L'hypothèse que $\log_2(3)$ est rationnel est donc fausse et
$$\log_2(3) \notin \mathbb{Q}.$$

Question 6

On commence par vérifier que l'affirmation est vraie quand $k = 1$. Dans ce cas, on a
$$3^1 - 1 = 3 - 1 = 2,$$
ce qui est bien un nombre pair.

On suppose que l'affirmation est vraie pour tout les nombres plus petit ou égaux qu'un certain nombre naturel $n > 1$. On veut montrer qu'elle est aussi vraie pour $n+1$. Nous allons montrer que $3^{n+1} - 1$ est pair si on suppose que $3^n - 1$ est pair.
$$\begin{aligned}3^{n+1} - 1 &= 3 \cdot 3^n - 1 \\ &= (2+1) \cdot 3^n - 1 \\ &= 2 \cdot 3^n + 1 \cdot 3^n - 1 \\ &= 2 \cdot 3^n + (3^n - 1).\end{aligned}$$
On suppose que $3^n - 1$ est pair. Le terme $2 \cdot 3^n$ est aussi pair. La somme des deux est donc aussi paire, donc $3^{n+1} - 1$ est pair.

Par le principe d'induction, on a montré que $3^n - 1$ est pair pour tout nombre naturel $n \geq 1$.

Question 7

a) $\{1, 2, 3, 4, \pi, 2\pi\}$

b) $\{1, 3\}$

c) $\{\pi, 5\}$

d) $[2, 8]$

e) $]4, 5]$

f) $[2, 4]$

g) $\{1, 2, 3\}$

h) $\{0.5, 3.14159, 3/5\}$

i) $\{\pi, e, \sqrt{2}\}$

Question 8

a) $[-3, \pi[$

b) $]-\infty, 7[$

c) $]0, 1/2[$

d) $]-2, 2[$

Question 9

a) $\frac{1}{2^3}$

b) $\sqrt{2}$

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

d) $\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$

e) $\sqrt{2^3}$

f) $\frac{1}{2^2}$

g) $\dfrac{1}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2}$

h) -5

i) 3

j) $\frac{1}{2}$

k) 1

Question 10

a) x^{-3}

b) $2x^{-3}$

c) $\frac{2}{3}x^{-5}$

d) $(x-3)^{-2}$

e) $7(x+1)^{-6}$

f) $x^{1/2}$

g) $(x-2)^{1/3}$

h) $\frac{1}{5}(x+2)^{1/4}$

i) $x^{-1/2}$

j) $2x^{-1/3}$

k) $\frac{2}{3}x^{-1/5}$

l) $x^{3/2}$

m) $(x-3)^{5/4}$

n) $x^{-3/2}$

o) $\frac{4}{3}x^{-4/5}$

p) $4(x-3/2)^2$

q) $8x^3$

r) $8(x-1/2)^3$

s) $2(x-1/4)^{-1/2}$

t) $(x-2)^{3/2}$

u) $\frac{3}{4}(x+1)^{2/3}$

v) $\frac{2}{5}(x+1)^{-3/10}$

Question 11

a) Équation de la droite : $y = -3x/2 + 1/2$. Pente$=-3/2$, ordonnée à l'origine $= 1/2$

b) Équation de la droite : $y = -\frac{3}{10}x + \frac{3}{2}$. Pente$=-3/10$, ordonnée à l'origine $= 3/2$

c) Équation de la droite : $y = -3x + 7$. Pente$=-3$, ordonnée à l'origine $= 7$

d) Équation de la droite : $y = -\dfrac{\sqrt{2}}{\log_2(3)}x + \dfrac{\sqrt{3}}{\log_2(3)}$. Pente$=-\dfrac{\sqrt{2}}{\log_2(3)}$, ordonnée à l'origine $= \dfrac{\sqrt{3}}{\log_2(3)}$

Question 12

a) $y = -5x - 11$

b) $y = -3x - 2$

c) $y = -5x + 3$

Question 13

a) $x=-3$ et $x=-4$
b) $x=-\frac{3}{2}$ et $x=\frac{3}{2}$
c) $x=-\frac{5}{3}$ et $x=0$
d) La fonction n'a pas de zéro

Question 14

a) La fonction n'a pas de zéro
b) $x=\frac{4}{3}$ et $x=\frac{3}{2}$
c) La fonction n'a pas de zéro
d) $x=\frac{1}{3}$ (zéro double)

Question 15

$f(x)=-\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{2}{3}x+\dfrac{8}{3}$

Question 16

a) $(4x-3)(x^2+1)$
b) $(x+2)(x+3)$
c) $(3x+2)^2$
d) $(4x-9)(4x+9)$
e) x^2+25
f) $3x(x-6)(x+6)$
g) $2x^3(9x^2+16)$
h) $(x+2)(x-2)(x+1)(x-1)$

Question 17

a) x=3/4
b) aucun zéro
c) $x=2$ et $x=1/2$
d) $x=1$ et $x=-1$
e) $x=0$,$x=1$ et $x=-\sqrt{2}$
f) $x=2$ et $x=-1$

Question 18

a) $x+1$
b) $x-1$
c) $x+1$ reste 2
d) x^2+x+1
e) x reste $x-1$
f) x^3-2x+1
g) x^4+2x^2+1 reste 1

Question 19

a) Non, car le facteur x^2-x+5 n'a pas de zéro : le discriminant $\Delta=b^2-4ac$ est négatif, il n'y a donc pas de zéros.
b) Laissé à l'étudiant.
c) Il n'y en a pas d'autres, d'après la factorisation.

Question 20

a) $(x-2)$ n'est pas un facteur de $P(x)$
b) Oui

Question 21

a) Chacun des termes de x^4+3x^2+2 consistent en une puissance paire de x avec un facteur positif, les valeurs prises par $P(x)$ sont donc toujours strictement positives. Elle n'admet donc pas de zéros.
b) Il existe une factorisation : $(x^2+1)(x^2+2)$. On peut la trouver en posant $y=x^2$ et en factorisant y^2+3y+2.
c) Chacun des facteurs de ce polynôme est irréductible. $P(x)$ n'a donc pas de facteur du premier degré, donc le théorème n'est pas contredit.

Question 22

a) y^2+3y+4
b) $(y+1)^2+3(y+1)+4$
c) $(y+h)^2+3(y+h)+4$
d) $(x^2)^2+3(x)+4$
e) $(x+\Delta x)^2+3(x+\Delta x)+4$
f) $\dfrac{1}{(x+\Delta x)^2+1}$
g) $\dfrac{1}{((x+\Delta x)+1)^2}$

Question 23

a) 27
b) 1
c) 27
d) $\sqrt{2}$
e) 2
f) $(1+h)^2=1+2h+h^2$
g) $(3+\Delta x)^3=27+27\Delta x+9\Delta x^2+\Delta x^3$
h) $\sqrt{y^2+1}$
i) $\frac{1}{y+\Delta x}$
j) 1
k) $(x+\Delta x)^{5/2}$
l) 0
m) 1/2
n) Non défini (division par zéro).
o) 1
p) $(x+\Delta x)-1$
q) $\dfrac{1}{(x+\Delta x)^2}-1$
r) $((x+\Delta x)+1)^2-(x+\Delta x)$

Question 24

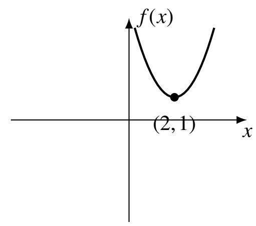
a) $6x-5$
b) $6x-10$
c) $2x+\frac{1}{x+1}$
d) $2x^3$
e) $2x^2$
f) $4x^2$
g) $\frac{2}{(x+1)^2}$
h) $\frac{1}{4x^2+1}$
i) $\frac{1}{(2x+1)^2}$

Question 25

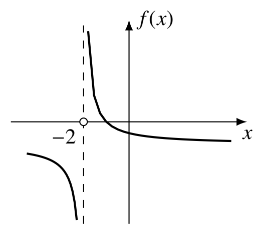
a) $y=-x+2$
b) $f(1)=1^3-4(1)=-3$
c) y=-3x-6

Question 26

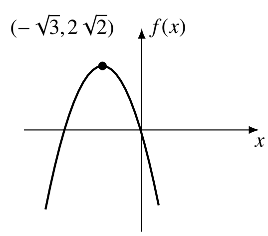
a)



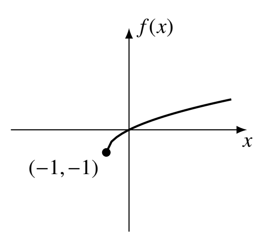
b)



c)



d)



Question 27

a) $f(x)=\frac{1}{x}$, $\text{dom}(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
b) $f(x)=1-x$, $\text{dom}(f)=\mathbb{R}$
c) pas une fonction !
d) $f(x)=-x$, $\text{dom}(f)=\mathbb{R}$
e) Pas une fonction.
f) $f(x)=\log_2(x^2)$, $\text{dom}(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
g) $f(x)=2x^2-3x+8$, $\text{dom}(f)=\mathbb{R}$.
h) $f(x)=x^2$, $\text{dom}(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$
i) Pas une fonction.
j) $f(x)=\frac{\sin(x)-2}{3}$, $\text{dom}(f)=\mathbb{R}$.

Question 28

a) $f(-1)$ n'est pas défini
b) $f(1)=1$
c) $f(3/2)=1$
d) $f(2)=3$
e) $f(3)$ n'est pas défini
f) $f(\pi)=1$

Question 29

a) $f(-3)=9$, $f(-2)=2$, $f(0)=0$, $f(1/2)=-1/2$, $f(1)=-1$, $f(2)=4$.
b) $\text{dom}(f)=\mathbb{R}$

Question 30

a) $f(-1)=-1/2$, $f(0)=-1$, $f(1)$ n'est pas défini, $f(2)=1$.
b) $\text{dom}(f)=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Question 31

a) $f(-3)=3$, $f(0)=0$, $f(2)=2$
b) $\mathbb{R}$
c) Non, car pour une valeur y donnée de l'image il existe généralement 2 valeur x du domaine tels que $|x|=y$.
d) Si $x\geq 0$, $|x|=x$ et $\sqrt{x^2}=x$, on a donc l'égalité. Si $x<0$, alors $|x|=-x$ et $\sqrt{x^2}=-x$. On a donc Dans tout les cas on $\sqrt{x^2}=|x|$, QED.
e) $|ab|=\sqrt{(ab)^2}=\sqrt{a^2b^2}=\sqrt{a^2}\sqrt{b^2}=|a||b|$, QED.

Question 32

a) $f\big(g(x)\big)=2\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{2}\right)-3=x$ et $g\big(f(x)\big)=\frac{2x-3}{2}+\frac{3}{2}=x$, donc f et g sont des fonctions inverses.
b) f et g sont des fonctions inverses
c) f et g sont des fonctions inverses

Question 33

a) $\text{dom}(f)=\mathbb{R}$
b) $\text{dom}(f)=\mathbb{R}\setminus\{3/2\}$
c) $\text{dom}(f)=\mathbb{R}\setminus\{3,-2\}$
d) $\text{dom}(f)=\mathbb{R}\setminus\{-5/2\}$
e) $\text{dom}(f)=\mathbb{R}\setminus\{-4,4\}$
f) $\text{dom}(f)=\mathbb{R}\setminus\{4\}$
g) $\text{dom}(f)=\mathbb{R}\setminus\{2,-1\}$
h) $\text{dom}(f)=[1,\infty[$
i) $\text{dom}(f)=[5/2,\infty[$
j) $\text{dom}(f)=[0,\infty[$
k) $\text{dom}(f)=[1,\infty[$
l) $\text{dom}(f)=]-\infty,-1]\cup[1,\infty[$
m) $\text{dom}(f)=\mathbb{R}$
n) $\text{dom}(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$
o) $\text{dom}(f)=\mathbb{R}$
p) $\text{dom}(f)=\mathbb{R}\setminus\{1\}$
q) $\text{dom}(f)=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$
r) $\text{dom}(f)=]-\infty,-1[\cup]5,\infty[$

Question 34

a) $y=\sqrt{25-x^2}$
b) $y=\sqrt{x^2-16}$
c) $y=x/\sqrt{2}$
d) $x=\sqrt{A}$
e) $h=\frac{A}{b}$
f) $A=x(5-x)$

Question 35

a) Ne croise pas l'axe des y, $x=\pm 2$
b) $y=3$, $x=3\sqrt{3}$
c) $y=2$, $x=-1$ ou 4
d) $y=-16$, $x=-2$ ou 2
e) $y=27$, $x=-3$
f) Ne croise pas l'axe des y, $x=-1/2$

Question 36

$\dfrac{3^3-2^3}{3-2}=27-8=19$

Question 37

$\dfrac{(2+\Delta x)^2-2^2}{(2+\Delta x)-2}=\dfrac{4\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}$