Yannick Delbecque — Département de mathématiques, Cégep de Saint-Laurent
Calcul différentiel — 201-NYA — Automne 2019

Examen formatif 2

Question 1
Répondre aux questions suivantes. Il n'est pas nécessaire de justifier vos réponses.

a) Vrai ou faux ? Si $f(x)$ n'est pas continue en $x = a$, alors $\lim_{x\to a} f(x)\nexists$.

b) Vrai ou faux ? Si en évaluant une limite on obtient la forme indéterminée « 0/0 », la limite n'existe pas.

c) Vrai ou faux ? Si deux fonctions $F(x)$ et $G(x)$ sont identiques près de a (sauf peut-être en a), alors

$$\lim_{x\to a} F(x) = \lim_{x\to a} G(x),$$

si la limite du membre de droite existe.

d) Donner un exemple de graphe de fonction où $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, mais où $\lim_{x\to a} f(x)\exists$ et $a \in \mathrm{dom}(f)$.

e) Donner un exemple de graphe de fonction où $\lim_{x\to a} f(x)\nexists$ mais où $f(a)$ est défini.

f) Évaluer la limite : $\lim_{x\to -2^-} \sqrt{4-x^2}$

Question 2
Donner l'esquisse d'une fonction f qui satisfait toutes les conditions suivantes (Il n'est pas nécessaire de justifier).

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = 4 \qquad -1 \notin \mathrm{Dom}(f) \qquad \lim_{x\to 1} f(x) = 2$$
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty \qquad f(1) = 3 \qquad \lim_{x\to 2} f(x)\nexists$$

Question 3
Évaluer les limites suivantes, si elles existent. Indiquez quand vous utilisez la continuité.

a) $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x^5+2x^4+x+2}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x^2+25}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^2+16}-5}{x-3}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{\frac{1}{16}-\frac{1}{x^2}}{(x+1)^2-25}$

Question 4
Soit f la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x+1} & \text{si } x < -1, \\ 0 & \text{si } x = -1, \\ x+1 & \text{si } -1 < x \leq 2, \\ 3 & \text{si } 2 < x < 3, \\ x^2-4 & \text{si } x \geq 3. \end{cases}.$$

a) Déterminer si f est continue en $x = -1$.

b) Déterminer si f est continue en $x = 2$.

c) Est-ce que f est continue sur l'intervalle $[-1, 2]$?

Question 5
Déterminer la dérivée des fonctions suivantes à l'aide des propriétés de la dérivée. Simplifier les résultats obtenus.

a) $y = (3x-1)^{12}(x^2+1)^{20}$

b) $y = \dfrac{(2x-3)^{10}}{(3x-2)^{10}}$

Question 6
Calculez les dérivées suivantes. Il n'est pas nécessaire de simplifier les résultats, mais on ne doit pas laisser d'exposants fractionnaires ou négatifs.

a) $f(x) = (1+2x)^2 \sqrt[3]{1-x^2}$

b) $f(x) = \dfrac{(3x-2)^2}{(x-1)\sqrt{x}}$

Question 7
Soit C l'hyperbole d'équation

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 3$$

Déterminer l'équation de la tangente à C au point $(4, 3)$.

Question 8
Soit C la courbe définie par l'équation

$$(x^3-1)y^2 = 1.$$

a) Déterminer la pente de la tangente en un point quelconque (x, y) sur la courbe au point à l'aide de la dérivation implicite.

b) L'affirmation suivante est-elle vraie ? Expliquer votre réponse.
« Comme y' vaut $6/7$ au point $(2, 1)$, la pente de la tangente à C au point $(2, 1)$ est $6/7$. »

Question 9
Prouver que si $f'(x)$ existe, alors $\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} f'(x)$. Utilisez la définition de la dérivée et les propriétés des limites (sans utiliser les propriétés de la dérivée). (Indice : utilisez le conjugué)

Question 10
Montrer que la fonction $\sqrt{(x-1)^2}$ n'est pas dérivable en $x = 1$.

Question 11
La surface d'une sphère est liée à son rayon par l'équation $S = 4\pi r^2$. Le rayon augmente à une vitesse constante de $\frac{1}{2}$ cm$/s$, à quelle vitesse grandi la surface de la sphère au moment où son rayon est de 100 cm ? Donnez les unités dans votre calcul.

Solutions

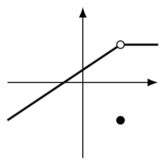
Question 1

a) Faux.

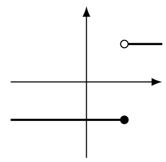
b) Faux.

c) Vrai.

d) Par exemple :



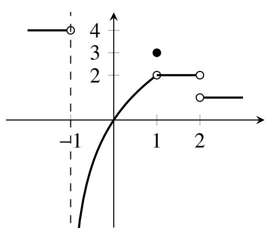
e) Par exemple :



f) $\lim\limits_{x\to -2^-} \sqrt{4-x^2} =$
$\lim\limits_{x\to -2^-} \sqrt{(2-x)(2+x)} =$
$\sqrt{(2--2^-)(2+(-2)^-)} =$
$\sqrt{4(0^-)}\ \sqrt{0^-} \nexists$

Question 2

Il y a plusieurs solutions possibles. En voici une.



Question 3

a) C'est une forme « $\frac{0}{0}$ ». Factoriser $(x+2)$ au numérateur et au dénominateur. Numérateur $x^2-4=(x+2)(x-2)$. Dénominateur (en divisant) : $x^5+2x^4+x+2=(x+2)(x^4+1)$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x^5+2x^4+x+2} &= \lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(x^4+1)}\\ &= \lim_{x\to-2}\frac{(x-2)}{(x^4+1)}\\ &\overset{\text{cont}}{=} \frac{((-2)-2)}{((-2)^4+1)}\\ &= -\frac{4}{17}\end{aligned}$$

b) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-25}{x^2+25} \overset{\text{cont}}{=} \dfrac{0}{50}=0$

c) C'est une forme « 0/0 ». Il faut donc simplifier le facteur $(x-3)$ au numérateur et au dénominateur pour lever l'indétermination.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x^2+16}-5}{x-3} &= \lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x^2+16}-5}{x-3}\,\frac{\sqrt{x^2+16}+5}{\sqrt{x^2+16}+5}\\ &= \lim_{x\to3}\frac{x^2+16-25}{x-3}\,\frac{1}{\sqrt{x^2+16}+5}\\ &= \lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}\,\frac{1}{\sqrt{x^2+16}+5}\\ &= \lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}\,\frac{1}{\sqrt{x^2+16}+5}\\ &= \lim_{x\to3}\frac{x+3}{1}\,\frac{1}{\sqrt{x^2+16}+5}\\ &= \lim_{x\to3}\frac{x+3}{\sqrt{x^2+16}+5}\\ &\overset{\text{cont}}{=} \frac{3}{5}.\end{aligned}$$

d) Forme « 0/0 ». On veut simplifier le facteur commun $(x-4)$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to4}\frac{\frac{1}{16}-\frac{1}{x^2}}{(x+1)^2-25} &= \lim_{x\to4}\frac{\left(\frac{x^2-16}{16x^2}\right)}{((x+1)-5)((x+1)+5)}\\ &= \lim_{x\to4}\frac{\left(\frac{(x-4)(x+4)}{16x^2}\right)}{(x-4)(x+6)}\\ &= \lim_{x\to4}\left(\frac{(x-4)(x+4)}{16x^2}\right)\frac{1}{(x-4)(x+6)}\\ &= \lim_{x\to4}\left(\frac{(x+4)}{16x^2}\right)\frac{1}{(x+6)}\\ &\overset{\text{cont}}{=} \frac{1}{320}\end{aligned}$$

(ind. Simplifier le plus possible les fractions dans les calculs au lieu de multiplier les facteurs ensembles.)

Question 4

a) La fonction f n'est par continue en $x=-1$: prendre la limite à gauche (attention, c'est un cas « $0/0$ ») et à droite quand $x\to-1$ pour montrer que $\lim_{x\to-1}f(x)$ n'existe pas. La fonction n'est donc pas continue en $x=-1$.

b) La fonction f est continue en $x=2$: prendre la limite à gauche et à droite quand $x\to2$ pour montrer que $\lim\limits_{x\to2}f(x)=3$. Comme on a aussi que $f(2)=3$, la fonction est continue en $x=2$.

c) Non, car elle n'est pas continue en $x=-1$; pour être continue sur $[-1,2]$, f doit être continue en chaque $x\in[-1,2]$.

Question 5

a)
$$\begin{aligned}y' &= \left((3x-1)^{12}(x^2+1)^{20}\right)'\\ &= \left((3x-1)^{12}\right)'(x^2+1)^{20}+(3x-1)^{12}\left((x^2+1)^{20}\right)'\\ &= 12(3x-1)^{11}(3x-1)'(x^2+1)^{20}+(3x-1)^{12}(20)(x^2+1)^{19}(x^2+1)'\\ &= 12(3x-1)^{11}(3)(x^2+1)^{20}+(3x-1)^{12}(20)(x^2+1)^{19}(2x)\\ &= 36(3x-1)^{11}(x^2+1)^{20}+40x(3x-1)^{12}(x^2+1)^{19}\\ &= (3x-1)^{11}(x^2+1)^{19}\left(36(x^2+1)+40x(3x-1)\right)\\ &= (3x-1)^{11}(x^2+1)^{19}\left(36x^2+36+120x^2-40x\right)\\ &= (3x-1)^{11}(x^2+1)^{19}(156x^2-40x+36)\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}y' &= \left(\frac{(2x-3)^{10}}{(3x-2)^{10}}\right)'\\ &= \left(\left(\frac{(2x-3)}{(3x-2)}\right)^{10}\right)'\\ &= 10\left(\frac{(2x-3)}{(3x-2)}\right)^{9}\left(\frac{(2x-3)}{(3x-2}\right)'\\ &= 10\frac{(2x-3)^9}{(3x-2)^9}\left(\frac{2x-3}{3x-2}\right)'\\ &= 10\frac{(2x-3)^9}{(3x-2)^9}\,\frac{(2x-3)'(3x-2)-(2x-3)(3x-2)'}{(3x-2)^2}\\ &= 10\frac{(2x-3)^9\left(2(3x-2)-(2x-3)(3)\right)}{(3x-2)^{11}}\\ &= 10\frac{(2x-3)^9(5)}{(3x-2)^{11}}\\ &= \frac{50(2x-3)^9}{(3x-2)^{11}}\end{aligned}$$

Question 6

a) $f'(x)=4(1+2x)\sqrt[3]{1-x^2}+\dfrac{2x(1+2x)^2}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}$

b) $f'(x)=\dfrac{6(3x-2)(x-1)\sqrt{x}-(3x-2)^2\left(\sqrt{x}+\frac{(x-1)}{2\sqrt{x}}\right)}{x(x-1)^2}$

Question 7

On trouve la pente de la tangente au point $(4,3)$ à l'aide de la dérivation implicite. On fait l'hypothèse que $y = f(x)$. En dérivant chaque membre de l'égalité $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 3$ par rapport à x, on obtient

$$\frac{x}{2} - \frac{2yy'}{9} = 0.$$

En isolant y', on obtient que $\frac{9x}{4y}$. Au point $(4,3)$, on a que $y' = \frac{9(4)}{4(3)} = 3$.

Comme la droite tangente est de pente 3 et passe par le point $(4,3)$ (qui est bien sur l'hyperbole !), l'équation de la droite est

$$y = 3x - 9.$$

Question 8

a) On dérive chaque membre de l'équation $(x^3-1)y^2 = 1$ pour obtenir

$$3x^2y^2 + 2(x^3-1)yy' = 0.$$

En isolant y', on trouve que $y' = -\frac{3x^2y}{2(x^3-1)}$.

b) Même si on peut évaluer y' au point $(2,1)$, la valeur obtenue n'est pas la pente de la tangente à C car le point $(2,1)$ n'est pas sur la courbe C : en substituant dans l'équation qui définit C, on trouve

$$(2^3-1)1^1 \neq 1.$$

L'expression obtenue pour y' est valable uniquement pour les (x,y) qui satisfont l'équation définissant C.

Question 9

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{f(x)}\right)' &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sqrt{f(x+\Delta x)} - \sqrt{f(x)}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \left(\sqrt{f(x+\Delta x)} - \sqrt{f(x)}\right)\frac{1}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \left(\sqrt{f(x+\Delta x)} - \sqrt{f(x)}\right)\frac{\sqrt{f(x+\Delta x)} + \sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(x+\Delta x)} + \sqrt{f(x)}}\frac{1}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} (f(x+\Delta x) - f(x))\frac{1}{\sqrt{f(x+\Delta x)} + \sqrt{f(x)}}\frac{1}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\sqrt{f(x+\Delta x)} + \sqrt{f(x)}}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\sqrt{f(x+\Delta x)} + \sqrt{f(x)}}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{f(x)}}f'(x).
\end{aligned}$$

Question 10

La dérivée de la fonction est (selon la définition) :

$$\left(\sqrt{(x-1)^2}\right)' = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{(x-1)^2} - \sqrt{(1-1)^2}}{x-1}$$

On montre que la limite du membre de droite n'existe pas en comparant les limites à droite et à gauche.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{(x-1)^2} - \sqrt{(1-1)^2}}{x-1} &= \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1^+} \frac{|x-1|}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1} 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{(x-1)^2} - \sqrt{(1-1)^2}}{x-1} &= \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1^-} \frac{|x-1|}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1^-} \frac{-(x-1)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1} -1 \\
&= -1
\end{aligned}$$

Comme les limites $x \to 1^+$ et $x \to 1^-$ ne sont pas les mêmes, la limite

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{(x-1)^2} - \sqrt{(1-1)^2}}{x-1}$$

n'exite pas. Ainsi la fonction $f(x) = \sqrt{(x-1)^2}$ n'est pas dérivable en $x = 1$.

Question 11

Comme $S = 4\pi r^2$, on a que $\frac{dS}{dt} = 8\pi r\frac{dr}{dt}$. Quand $r = 100$ et $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2}$, on obtient

$$\frac{dS}{dt} = 8\pi(100\text{ cm})\left(\frac{1}{2}\text{ cm}/2\right) = 400\pi\text{ cm}^2/s.$$