Chapitre 4

Limites et continuité

4.1 Définition du concept de limite

On écrit $x \to a$ pour signifier que « x est aussi près que l'on veut de a ». De même manière, on écrit que $f(x) \to L$ pour dire que « $f(x)$ aussi près que l'on veut de L en choisissant les bonnes valeurs de x.

Une manière d'interpréter la notation $x \to 2$ par exemple, est d'imaginer une suite quelconque de nombre qui s'approche de 2. On pourrait par exemple considérer

$$2.1, 2.01, 2.001, 2.0001, \ldots$$

ou encore

$$1.9, , 1.99, 1.999, \ldots$$

et même

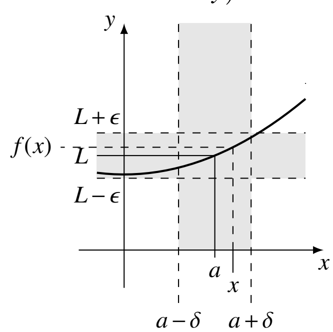
$$2.1, 1.9, 2, 01, 1.99, 2.001, 1.999, 2.0001, \ldots$$

> **Définition 4.1.** La notation $\lim_{x\to a} f(x) = L$ signifie :
>
> « $f(x)$ peut être aussi près de L que l'on veut si $x \in \mathsf{dom}(f)$ est assez près de a, mais différent de a. »
>
> On peut aussi dire : $f(x) \to L$ si $x \to a$ et $x \neq a$.

Note : la *manière* de se rapprocher de a ne change rien à la limite. Peu importe comment x se rapproche de a, si la limite existe, $f(x)$ se rapproche toujours de la limite L.

Version précise cette définition (où $d(x, y) = |y - x|$ est la distance entre x et y) :

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \overset{\text{def}}{\iff} \forall \epsilon > 0. \exists \delta > 0. d(x, a) < \delta \implies d(f(x), L) < \epsilon$$



Enfin,la spécification d'une limite ne dépend pas du nom de la variable utilisée comme argument de fonction. On peut la changer comme on veut : les expressions $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{y\to a} f(y)$ et $\lim_{z\to a} f(z)$ désignent toutes la même quantité : la limite de la fonction quand son argument tend vers a.

4.1.1 Existence d'une limite

On dit que la limite $\lim_{x\to a} f(x)$ existe quand il y a un L tel que

$$\lim_{x\to a} f(x) = L;$$

on peut écrire $\lim_{x\to a} f(x)\exists$ pour dire que la limite existe sans spécifier la valeur de cette limite.

Une limite n'existe pas quand il n'y a pas de L tel que $f(x)$ puisse être aussi près de L que l'on veut si on prend des x assez près de a. Dans ce cas, on écrit $\lim_{x\to a} f(x)\nexists$.

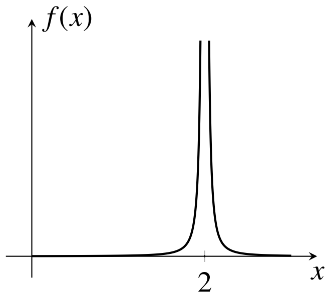
Voici trois exemples où une limite n'existe pas.

Si la valeur de la fonction devient indéfiniment grande ou petite. Dans ce cas, on écrit habituellement $\lim_{x\to 2} f(x) = \pm\infty$.

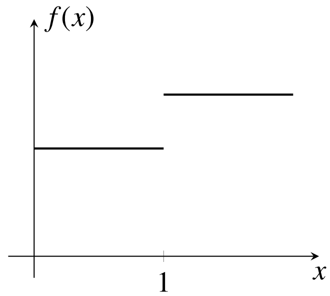
S'il y a un « saut » dans le graphe de la fonction faisant en sorte qu'en s'approchant d'un côté de a ou de l'autre, on trouverait des limites différentes.

Si la valeur de la fonction « oscille » entre différentes valeurs sans jamais s'approcher d'aucune valeur particulière.

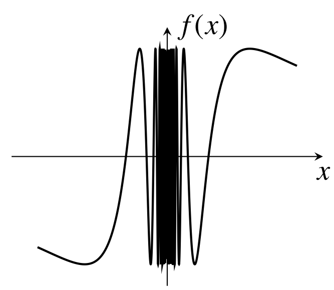
$\lim_{x\to 2} f(x)\nexists$



$\lim_{x\to 1} f(x)\nexists$



$\lim_{x\to 0} f(x)\nexists$



4.1.2 Déterminer « expérimentalement » la limite d'une fonction

La limite de certaines fonctions peut être déterminée en observant le comportement des valeurs $f(x)$ quand on choisis des x de plus en plus près de a.

Exemple 4.1. On veut déterminer la valeur de $\lim_{x\to 0} f(x)$ si $f(x) = 2x+1$. On prend des valeurs de x de plus en plus près de 0 (la colonne x du tableau suivant). Par chacune de ces valeurs, on calcule la valeur de $f(x)$.

x	$f(x)$
1.00000	3.00000
0.0312500	1.06250
0.00411523	1.00823
0.000976562	1.00195
0.000320000	1.00064
0.000128601	1.00026
0.0000594990	1.00012
0.0000305176	1.00006
0.0000169351	1.00003
0.0000100000	1.00002

On observe que quand $x \to 0$, $f(x) = 2x+1$ se rapproche de 1.

Notons que ce comportement ne dépend pas des nombres choisis : peut importe comment $x \to 0$, $f(x)$ se rapproche de 1. Dans le tableau suivant, on prend dès valeurs de x qui « oscillent » autour de la valeur centrale 0, mais de plus en plus près de 0. Les valeurs de $f(x)$ sont de plus en plus près de 1, même si elles ont parfois plus grande que 1, parfois plus petite que 1.

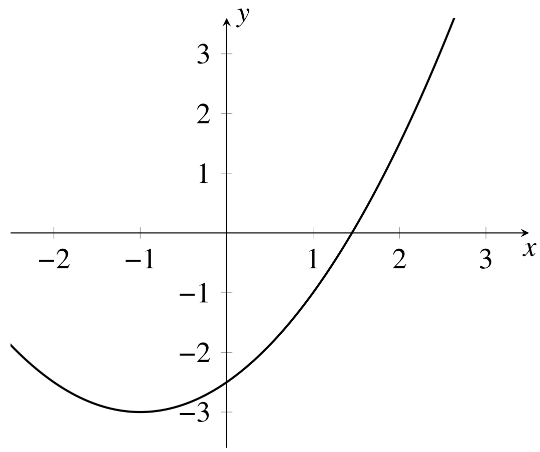
x	$f(x)$
0.0156250	1.03125
-0.00195312	0.996094
0.000578704	1.00116
-0.000244141	0.999512
0.000125000	1.00025
-0.0000723380	0.999855
0.0000455539	1.00009
-0.0000305176	0.999939
0.0000214335	1.00004
-0.0000156250	0.999969

Notons enfin que $f(0) = 1$, c'est à dire que la valeur de la fonction en $x = 1$ coïncide avec la valeur dont s'approche $f(x)$ quand $x \to 0$.

4.1.3 Évaluation d'une limite à l'aide d'un graphique

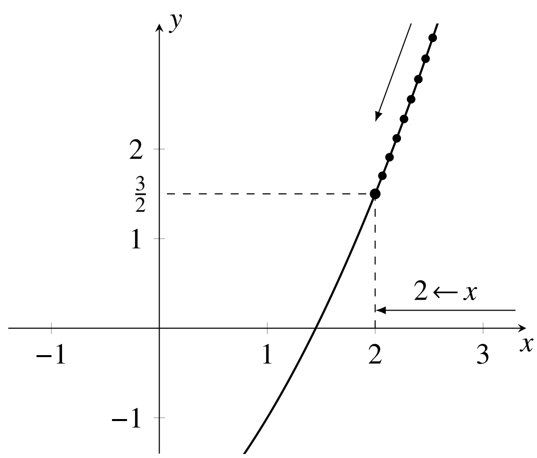
Si on connait le graphique d'une fonction, on peut souvent deviner les valeurs des limites.

Exemple 4.2. Le graphe de la fonction $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 3$ est le suivant.



Ajoutons les points calculés dans le tableau suivant, en prenant une suite de valeurs de x telle que $x \to 2$.

x	$f(x)$
2.0080	1.5240
2.0046	1.5139
2.0029	1.5088
2.0020	1.5059
2.0014	1.5041
2.0010	1.5030
2.0008	1.5023
2.0006	1.5017
2.0005	1.5014
2.0004	1.5011

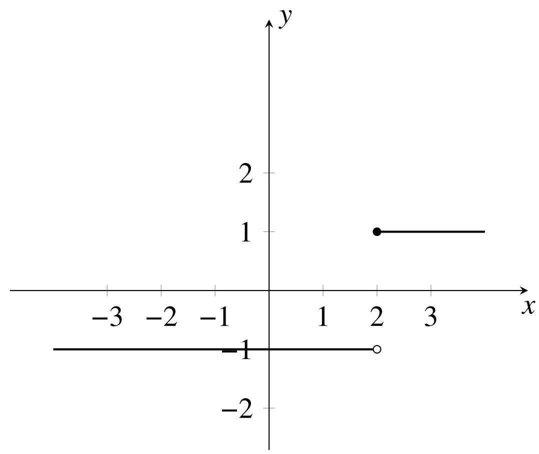


On voit sur le graphique que les valeurs de $f(x)$ sont de plus en plus proche de 3/2. On a donc que

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{3}{2}.$$

Cela est vrai peu importe comment la suite de valeurs de x s'approche de 2 : les valeurs de la fonction seront toujours de plus en plus près de 3/2.

En étudiant le dernier exemple, on pourrait penser que la limite d'une fonction quand $x \to a$ est toujours $f(a)$, mais ce n'est pas le cas. Les fonction où la limite ne coïncide pas avec la valeur de la fonction sont dites **discontinues**. Tentez par exemple de faire comme dans le dernier exemple pour deviner la valeur de la limite avec la fonction suivante.



Si on prend une suite de valeurs de x telle que $x \to 2$ et que $x > 2$, les valeurs de $f(x)$ s'approchent de 1 qui est $f(2)$. Cependant, si on prend une suite de valeurs de x qui s'approche de 2 mais telles que $x < 2$, alors les valeurs de $f(x)$ s'approchent de -1, qui n'est pas $f(1)$. Ainsi, on voit qu'il n'est pas toujours vrai que

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

4.1.4 Fonctions ayant les mêmes limites

Deux fonctions peuvent être globalement différentes, mais identiques dans certaines régions. Un principe très important pour évaluer algébriquement des limites (c'est à dire sans l'aide d'un tableau de valeurs ou d'un graphique), est de remplacer une fonction pour laquelle l'évaluation d'une limite est problématique par une autre pour laquelle la limite est plus facile à déterminer.

Nous faisons du même coup l'hypothèse que la valeur de la limite $\lim_{x\to a} f(x)$ ne dépend pas du comportement de la fonction loin de $x = a$, mais uniquement des valeurs de $f(x)$ assez proche de $x = a$.

Hypothèse 2. *Si $f(x) = g(x)$ pour tout $x \neq a$ assez près de a, sauf peut-être en $x = a$, et si la limite du membre de droite existe, alors*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x).$$

4.2 Limites à gauche et limites à droite

Nous avons vu qu'une des situations faisant qu'une limite $\lim_{x\to a} f(x)$ n'existe pas est celle où faire s'approcher x de a par la gauche ou par la droite ne donne pas le même résultat. Pour étudier plus précisément ce type de situation, nous introduisons une version de la notion de limite où les valeurs de x sont contraintes à être « à gauche » ou « à droite » de a.

Les limites à gauche sont définies comme les limites en général, mais en limitant les valeurs possible de x « à gauche » de a.

On écrit $x \to a^-$ pour dire que x se rapproche de a par des valeurs plus petites que a. De même, on écrit $x \to a^+$ pour dire que x se rapproche de a par des valeurs plus grandes que a.

Définition 4.2.

Limites à droite : la notation $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ signifie :

> « $f(x)$ peut être aussi près de L que l'on veut si $x \in \mathrm{dom}(f)$ est assez près de a avec $x > a$. »

Limites à gauche : la notation $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ signifie :

> « $f(x)$ peut être aussi près de L que l'on veut si $x \in \mathrm{dom}(f)$ est assez près de a avec $x < a$. »

Le lien entre la limite et les limites à gauche et à droite est donné par le résultat suivant.

Hypothèse 3.

$$\textit{Si } \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L, \textit{ alors } \lim_{x\to a} f(x) = L.$$

$$\textit{Si } \lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x), \textit{ alors } \lim_{x\to a} f(x) \nexists.$$

La seconde de ces hypothèses est utile pour déterminer algébriquement si une limite existe.

Exemple 4.3. Soit la fonction f définie de la manière suivante.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 1 \\ (x+1)^2 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Déterminons si la limite $\lim_{x\to 1} f(x)$ existe.

D'une part, si $x \to 1$ par la droite, on a que

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} x^2 = 1^2 = 1.$$

Notez que nous utilisons l'hypothèse 2 pour remplacer $f(x)$ par x^2 quand $x \geq 1$, car les deux fonctions sont égales sur l'intervalle $[1, \infty[$ et ont donc les mêmes limites sur cette région.

D'autre part, si $x \to 1$ par la gauche, on a que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} (x+1)^2 = (1+1)^2 = 4$$

En comparant les deux résultats, on voit que

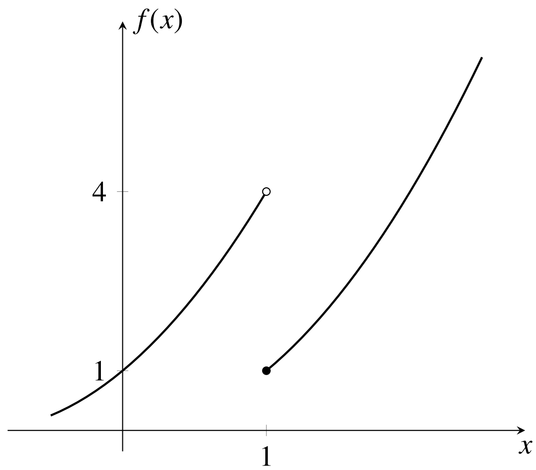
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x),$$

et donc, par l'hypothèse 3, la limite

$$\lim_{x\to 1} f(x)$$

n'existe pas.

Pour mieux comprendre l'argument algébrique, voici le graphe de la fonction f.



4.2.1 Composition de fonction

Quand on doit déterminer la limite d'une fonction composée comme $f \circ g$, la limite de la composition est trouvée à l'aide du résultat suivant.

Proposition 4.1. Si la limite $\lim_{x\to a} g(x)$ existe, on peut poser $b = \lim_{x\to a} g(x)$. On a alors que

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = \lim_{y\to b} f(y).$$

Démonstration. Supposons que la limite $\lim_{x\to a} g(x)$ existe, et posons $b = \lim_{x\to a} g(x)$ et $y = g(x)$. Il faut montrer que

$$\lim_{y\to b} f(y) = \lim_{x\to a} f(g(x)).$$

Quand $x \to a$, $y = g(x) \to b$ par définition de b. Les limites $\lim_{y\to b} f(y)$ et $\lim_{x\to b} f(g(x))$ sont donc égales. Comme la variable utilisée comme argument de fonction dans une limite n'a pas d'importance,

$$\lim_{x\to b} f(g(x)) = \lim_{y\to b} f(y) = \lim_{x\to b} f(x).$$ □

Exemple 4.4. On peut évaluer

$$\lim_{x\to 2}(x+1)^2$$

en considérant la fonction donnée comme la composition de $f(x) = x^2$ et de $g(x) = x+1$. Comme $\lim_{x\to 2}(x+1) = 3$, on peut remplacer la limite originale en utilisant la dernière proposition :

$$\lim_{x\to 2}(x-1)^2 = \lim_{y\to 3} y^2.$$

Exemple 4.5.

$$\lim_{x\to 3} \sqrt{x-2} = \lim_{y\to 1} \sqrt{y}.$$

4.3 Limites et continuité

Le concept de *continuité* permet de mieux comprendre pourquoi certaines limites n'existent pas.

On dit qu'une fonction est continue en un point si son comportement près de ce point permet de prédire la valeur de la fonction à ce point. Plus rigoureusement, on défini la continuité de la manière suivante.

Définition 4.3. Une fonction f est continue au point a si et seulement si

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a),$$

la limite existe et que $f(a)$ soit défini.

4.3.1 Continuité des fonctions définies par morceaux

Exemple 4.6. Soit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ 2x & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Comme la fonction f est définie par un polynôme si $x \neq 1$, f est continue pour toute valeur de $x \neq 1$. Est-ce que f est continue en $x = 1$?

Pour que f soit continue en $x = 1$, il faut que (1) $f(1)$ soit défini, (2) $\lim_{x\to 1} f(x)$ existe et que

$$(3) \quad \lim_{x\to 1} f(x) = f(1).$$

Par définition, $f(1) = 3$.

On vérifie $\lim_{x\to 1} f(x)$ à l'aide des limites à droite et à gauche.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 2x = 2(1) = 2$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2 = (1)^2 = 1$$

Comme la limite à droite (2) n'est pas égale à la limite à gauche (1), $\lim_{x\to 1} f(x) \nexists$ et f ne peut pas être continue en $x = 1$.

Exemple 4.7. Soit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 2 \\ -10 & \text{si } x = 2 \\ 2 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Comme la fonction f est définie par un polynôme si $x \neq 0, 1$, f est continue pour toute valeur de $x \neq 0, 1$. Est-ce que f est continue en en $x = 0$ et en $x = 1$?

En $x = 0$: $f(0) = 0^2 = 0$ est défini.

On vérifie si $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe à l'aide des limites à droite et à gauche.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 = (0)^2 = 0$$

Comme la limite à droite est égale à la limite à gauche et on la même valeur 0, la limite $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Enfin, on a que

$$0 = \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0;$$

la fonction est donc continue en $x = 0$.

En $x = 2$, on a que $f(2) = -10$ par définition.

On vérifie si $\lim_{x\to 2} f(x)$ existe à l'aide des limites à droite et à gauche.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} 2 = 2$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x = 2$$

Les deux limites existent et ont la valeur 2. On a donc que

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 2$$

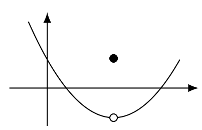
La fonction n'est cependant pas continue en $x = 2$ car $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$ alors que $f(2) = -10$. On a donc que

$$\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2).$$

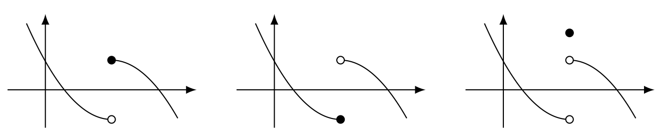
4.3.2 Différent types de discontinuités

On peut se servir de la définition de continuité (4.3) pour classifier les discontinuités : il y a quatre types de discontinuités :

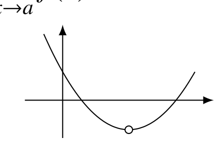
Type 1 $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ mais la limite existe et $f(a)$ est définie.



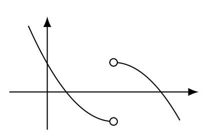
Type 2 $\lim_{x\to a} f(x)$ n'existe pas mais $f(a)$ est défini.



Type 3 $f(a)$ n'est pas définie mais $\lim_{x\to a} f(x)$ existe.



Type 4 $f(a)$ n'est pas définie et $\lim_{x\to a} f(x)$ n'existe pas.



Quand une fonction ait une discontinuité en $x = a$ qui ne peut pas être modifiée en fonction continue en a en modifiant la définition de $f(a)$ de manière à ce que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, la discontinuité est dite **essentielle**. Dans le cas contraire, on dit que la discontinuité est **non-essentielle**. Les discontinuités non-essentielles sont celles où la limite $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, c'est à dire celle de type 1 et 3.

4.3.3 Continuité sur un intervalle

Définition 4.4. On dit qu'une fonction f est continue sur un ensemble $I \subseteq \mathbb{R}$ si elle est continue pour chaque x dans I.

Dans ce cours, l'ensemble I sera le plus souvent un intervalle comme $[a,b]$, $]a,b[$, $]a,b]$ ou $[a,b[$. L'ensemble I peut aussi être le domaine de la fonction f $(I = \mathrm{dom}(f))$; si f est continue sur $\mathrm{dom}(f)$, on dit que « f est continue sur son domaine. »

Comme une fonction n'est pas continue là où elle n'est pas définie, le domaine d'une fonction coïncide souvent avec l'ensemble des valeurs où une fonction est continue.

4.4 Propriétés des limites

Hypothèse 4. *Propriétés axiomatiques des limites acceptés sans démonstration, mais motivées par l'intuition géométrique.*

(AL1) Si une limite existe, elle est unique.

(AL2) $\lim_{x\to a} C = C$ *(C = constante)*

(AL3) $\lim_{x\to a} x = a$

(AL4) $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$, *si les deux limites du membre de droite existent.*

(AL5) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$, *si les deux limites du membre de droite existent.*

Proposition 4.2. Les limites ont les propriétés suivantes, pouvant être déduites des propriétés axiomatiques.

(PL1) $\lim_{x\to a} Cf(x) = C \lim_{x\to a} f(x)$ si la limite du membre de droite existe.

(PL2) $\lim_{x\to a} x^n = a^n$.

(PL3) $\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$, où $P(x)$ est un polynôme.

(PL4) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, si les deux limites du membre de droite existent et si $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$.

(PL5) $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ si $\sqrt[n]{a}$ est défini.

(PL6) $\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$ quand $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes et quand $Q(a) \neq 0$.
(Les fonctions rationnelles sont continues sur leur domaines)

Démonstration. (PL1)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} C f(x) &= \left(\lim_{x\to a} C\right)\left(\lim_{x\to a} f(x)\right) && (AL3) \\ &= C \lim_{x\to a} f(x) && (AL1) \end{aligned}$$

(PL2)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} x^n &= \lim_{x\to a} \overbrace{x \cdots x}^{n \text{ fois}} \\ &= \overbrace{\left(\lim_{x\to a} x\right) \cdots \left(\lim_{x\to a} x\right)}^{n \text{ fois}} \\ &= \overbrace{a \cdots a}^{n \text{ fois}} \\ &= a^n \end{aligned}$$

(PL3) Comme un polynôme est une somme de monômes consistants en puissances de x multipliés par des constantes, on utilise (PL1), (PL2) et (AL3) pour démontrer l'égalité voulue.

La démonstration des autres propositions est laissée en exercice ! □

4.4.1 Continuité des fonctions transcendantes

Hypothèse 5. *On suppose la continuité de certaines fonctions transcendantes.*

(AL6) $\lim_{x\to a} x^r = x^a$ *pour un nombre réel r quelconque.*

(AL7) $\lim_{x\to a} b^x = b^a$ *(la fonction exponentielle est continue)*

(AL8) $\lim_{x\to a} \log_b(x) = \log_b(a)$ *si* $\log_b(a)$ *est défini. (la fonction logarithme est continue)*

(AL9) $\lim_{x\to a} \sin(x) = \sin(a)$ *(la fonction sinus est continue)*

(AL10) $\lim_{x\to a} \cos(x) = \cos(a)$ *(la fonction cosinus est continue)*

(AL11) $\lim_{x\to a} \tan(x) = \tan(a)$ *(la fonction tangente est continue)*

Exemple 4.8. On peut déduire que $\cos(x)$ et $\tan(x)$ sont des fonctions continues sur leurs domaines à l'aide des autres propriétés des limites données jusqu'ici.

(PL7) $\lim_{x\to a} \cos(x) = \cos(a)$ (la fonction cosinus est continue)

(PL8) $\lim_{x\to a} \tan(x) = \tan(a)$ (la fonction tangente est continue)

On laisse en exercice ces démonstrations, que l'on peut faire en utilisant les identités suivantes :

$$\cos(x) = \sin(x+\pi/2) \qquad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

4.5 Continuité et composition de fonctions

Théorème 4.1. La fonction f est continue en b si et seulement si

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$$

pour toutes les fonctions g telle que $\lim_{x\to a} g(x) = b$ existe.

Autrement dit, une fonction est continue en un point si et seulement si on peut « échanger la limite et la fonction » ou « la limite passe à travers la fonction. »

Exemple 4.9. Évaluons $\lim_{x\to 4} \sqrt{x-3}$ à l'aide du theorème 4.1.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4} \sqrt{x-3} &= \sqrt{\lim_{x\to 4} x-3}\\ &= \sqrt{4-3}\\ &= \sqrt{1}\\ &= 1\end{aligned}$$

Exemple 4.10. Évaluons $\lim_{x\to 2}(x-1)^{100}$ à l'aide du theorème 4.1.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}(x-1)^{100} &= \left(\lim_{x\to 2} x-1\right)^{100}\\ &= (2-1)^{100}\\ &= 1^{100}\\ &= 1\end{aligned}$$

Démonstration. Supposons que f est continue en $b = \lim_{x\to a} g(x)$, c'est à dire que

$$\lim_{u\to b} f(u) = f(b).$$

Si g est une fonction telle que $\lim_{x\to a} g(x) = b$, on peut remplacer b par $\lim_{x\to a} g(x)$ et obtenir

$$\lim_{x\to b} f(x) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right).$$

Quand $x \to a$, $g(x) \to b$. On peut donc remplacer $\lim_{u\to b} f(x)$, en posant $u = g(x)$ qui s'approche de b quand x tend vers a. C'est une manière particulière de tendre vers a, mais comme on suppose que $\lim_{u\to b} f(u) = f(b)$ peu importe la manière que u s'approche de a, cette manière particulière ne change pas la limite qui est toujours $f(b)$. Ainsi

$$\lim_{u\to b} f(u) = \lim_{x\to a} f(g(x)).$$

En combinant les résultats, on obtient le résultat voulu :

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} f(g(x))\right).$$

La réciproque est plus simple à démontrer. On suppose que

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} f(g(x))\right)$$

pour toute fonction g telle que $\lim_{x\to a} g(x)$ existe. On peut prendre le cas particulier $g(x) = x$, car la limite existe. L'hypothèse devient

$$\lim_{x\to a} f(x) = f\left(\lim_{x\to a} x\right).$$

Comme $\lim_{x\to a} x = a$, on obtient que

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a),$$

ce qui montre que f est continue en a. □

Enfin, on démontrer que la composition de deux fonctions continues est elle aussi continue.

Proposition 4.3. Si f et g sont deux fonctions continues, alors la composée $f \circ g$ est aussi continue et

$$\lim_{x\to a} f\big(g(x)\big) = f\big(g(a)\big).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} [f\circ g](x) &= \lim_{x\to a} f\big(g(x)\big)\\ &= f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) \quad \text{(par thm 4.1 et } f \text{ continue)}\\ &= f(g(a)) \quad \text{(car } g \text{ continue)}\\ &= [f\circ g](a)\end{aligned}$$

Ainsi, la composée $f \circ g$ est continue car $\lim_{x\to a} [f\circ g](x) = [f\circ g](a)$. □

En combinant les hypothèse (AL1) à (AL11) et les propriétés (PL1) à (PL8) et cette dernière proposition, on sait maintenant que toutes les fonctions obtenues en combinant des fonctions continues par composition, produits, quotients, puissantes, racines, etc, sont elles aussi continues.

4.5.1 Limites à gauche et à droite et composition

La propriété 4.1 s'applique aux limites à droites et à gauche dans certaines conditions.

Par exemple, $\lim_{x\to a^+} f(g(x)) = \lim_{x\to b^+} f(x)$ si $b = \lim_{x\to a^+} g(x)$.

On utilise habituellement les notations suivantes

$f(b^+)$ pour $\lim_{x\to a} f(g(x))$ quand $g(x) \to b^+$ quand $x \to a^+$.

$f(b^-)$ pour $\lim_{x\to a} f(g(x))$ quand $g(x) \to b^-$ quand $x \to a^+$.

Il faut donc pouvoir déterminer de quelle manière $g(x)$ approche de b quand $x \to a^+$.
On peut par exemple utiliser le résultat suivant et la factorisation :

Proposition 4.4.

$$\lim_{x\to a^+} (x-a) = 0^+$$

$$\lim_{x\to a^-} (x-a) = 0^-$$

On peut ainsi écrire que $(a^+ - a) = 0^+$ et $(a^- - a) = 0^-$.

Exemple 4.11.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5^+} \sqrt{x-5} &= \sqrt{5^+ - 5}\\ &= \sqrt{0^+}\\ &= 0\end{aligned}$$

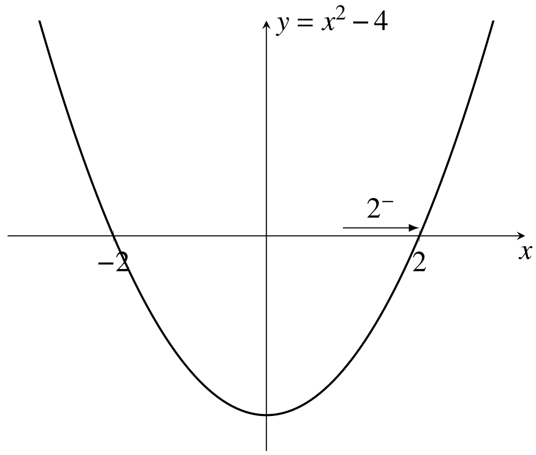
$$\lim_{x\to 5^-} \sqrt{x-5} = \sqrt{5^- - 5} = \sqrt{0^-} \nexists.$$

Exemple 4.12.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^+} \sqrt{x^2-4} &= \lim_{x\to 2^+} \sqrt{(x-2)(x+2)}\\ &= \sqrt{(2^+-2)(2^++2)}\\ &= \sqrt{(0^+)(4)}\\ &= \sqrt{0^+}\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^-}\sqrt{x^2-4} &= \lim_{x\to 2^-}\sqrt{(x-2)(x+2)}\\ &= \sqrt{(2^- - 2)(2^- + 2)}\\ &= \sqrt{(0^-)(4)}\\ &= \sqrt{0^-}\\ &= 0\end{aligned}$$

On peut mieux comprendre pourquoi $\lim_{x\to 2^-} x^2-4$ à l'aide du graphe de $y = x^2-4$.



On voit dans ce graphe que les valeurs de y sont plus petite que 0 quand $x \to 2^+$, donc que $y \to 0^-$.

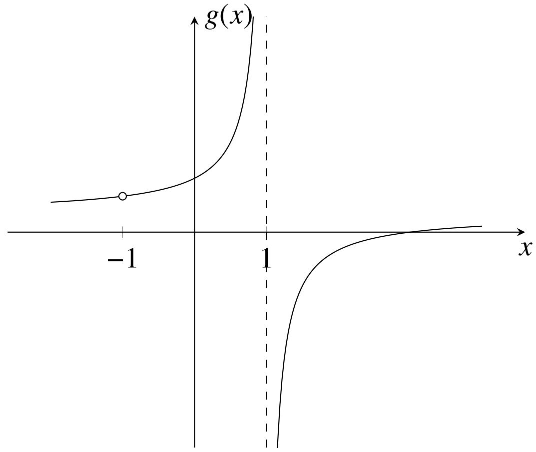
4.6 Indéterminations

Une **indétermination** de la forme « $\frac{0}{0}$ » est une situation où, en évaluant la limite

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

on trouve que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to a} g(x) = 0$. Dans cette situation, les propriétés des limites que nous avons vu jusqu'ici ne permettent pas de déterminer la valeur de la limite (d'où le terme *indétermination* ou *forme indéterminée*).

Exemple 4.13. Considérer la fonction $f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{x^2-1}$.



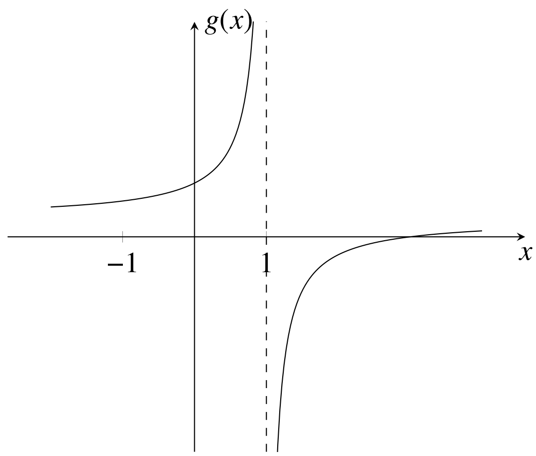
En factorisant le numérateur et le dénominateur de la fraction algébrique qui définie la fonction et en simplifiant, on trouve que

$$\frac{x^2-2x-3}{x^2-1} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x-3}{x-1}.$$

La fonction f n'est pas définie en $x = -1$ et en $x = 1$, car ces deux valeurs entrainent des divisions par zéro. Cependant, l'expression $\frac{x-3}{x-1}$ peut s'évaluer quand $x = 1$. Si on défini

$$g(x) = \frac{x-3}{x-1},$$

on a une nouvelle fonction qui a les mêmes valeurs que f, sauf quand $x = 1$. Son graphe est le suivant :



On a donc la situation suivante : les propriétés des limites vue précédemment ne permettent pas d'évaluer

$$\lim_{x\to -1} f(x).$$

parce qu'il y a une discontinuité. La discontinuité de la fonction f est cependant non-essentielle. En simplifiant le facteur commun à x^2-2x-3 et à x^2-1, on obtient une nouvelle fonction g. Comme les deux fonctions sont identiques sauf en $x=-1$, on peut remplacer f par g pour évaluer la limite :

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1} g(x) = \lim_{x\to-1} \frac{x-3}{x-1} = \frac{(-1)-3}{(-1)-1} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Ces indéterminations « $\frac{0}{0}$ » sont dues à une discontinuité de la fonction $\frac{f(x)}{g(x)}$. Si cette discontinuité est non-essentielle, on peut « lever l'indétermination » en utilisant l'hypothèse 2. On rappelle qu'intuitivement, cette hypothèse permet de remplacer dans une limite une fonction par un autre si les deux fonctions sont identiques près d'une valeur a. Cela permet de remplacer une fonction f discontinue en a par une fonction g continue en a qui a la même limite. Comme g est continue en a, la limite $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ s'évalue plus facilement que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

4.6.1 Techniques algébriques pour lever les indéterminations

Pour utiliser l'hypothèse 2, il faut être capable de trouver la bonne fonction de remplacement ! Dans les indétermination « $\frac{0}{0}$ », on peut trouver $g(x)$ en simplifiant un facteur commun au dénominateur et au numérateur — le « facteur coupable. »

Dans le cadre de ce cours, il y aura trois techniques algébriques pour trouver le facteur commun à simplifier pour lever une indétermination « $\frac{0}{0}$ » :

- factoriser (utiliser le théorème de factorisation ou une identité connue) ;
- multiplier par le conjugué s'il y a des racines.
- mettre au dénominateur commun s'il y a des fractions.

Ces trois techniques ne permettent pas de lever toutes les indéterminations, car dans certains cas, on peut obtenir une forme « 0/0 » sans que l'on puisse facilement trouver un facteur à simplifier. Par exemple, la limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}.$$

est une indétermination « $\frac{0}{0}$ », mais comment trouver au numérateur un facteur x à simplifier avec le dénominateur ? Nous verrons plus loin que cette limite vaut 1. Cette limite est très importante en science (en physique en particulier) car elle permet d'approximer $\sin(x)$ par x quand on sait que x est près de 0.

Exemple 4.14. Dans cet exemple, on simplifie le facteur commun par factorisation polynomiale.

Premièrement, on vérifie que

$$\frac{x^3-3x^2-6x+8}{x^3-3x^2-10x+24}$$

est donne bien une expression de la forme « 0/0 » quand $x=4$. On a donc que $x=4$

est un zéro des polynômes x^3-3x^2-6x+8 et $x^3-3x^2-10x+24$. Par le théorème de factorisation, on sait que $(x-4)$ est un facteur de chacun de ces deux polynôme. On trouve par division polynômiale que

$$x^3-3x^2-6x+8=(x-4)(x^2+x-2) \text{ et } x^3-3x^2-10x+24=(x-4)(x^2+x-6).$$

On utilise ces factorisation pour simplifier le facteur commun $x-4$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 4}\frac{x^3-3x^2-6x+8}{x^3-3x^2-10x+24} &= \lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x^2+x-2)}{(x-4)(x^2+x-6)}\\
&= \lim_{x\to 4}\frac{\cancel{(x-4)}(x^2+x-2)}{\cancel{(x-4)}(x^2+x-6)}\\
&= \lim_{x\to 4}\frac{x^2+x-2}{x^2+x-6}\\
&= \frac{4^2+4-2}{4^2+4-6}\\
&= \frac{9}{7}
\end{aligned}$$

Exemple 4.15. On vérifie pour commencer que l'on a bien une forme « 0/0 » :

$$\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\frac{4-4}{\sqrt{4}-2}=\text{« }\frac{0}{0}\text{ »}.$$

On utilise le conjugué de $\sqrt{x}-2$ pour éliminer la racine problématique : $(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)=(x-4)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} &= \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}\\
&= \lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-4)}(\sqrt{x}+2)}{\cancel{(x-4)}}\\
&= \lim_{x\to 4}\sqrt{x}+2\\
&= \sqrt{4}+2\\
&= 4
\end{aligned}$$

Exemple 4.16. Dans cet exemple, on utilise la mise au dénominateur commun.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 4} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{4}}{x-4} &= \lim_{x\to 4} \frac{\frac{4-x}{4x}}{x-4} \\
&= \lim_{x\to 4} \frac{4-x}{4x} \frac{1}{x-4} \\
&= \lim_{x\to 4} \frac{-(x-4)}{4x} \frac{1}{x-4} \\
&= \lim_{x\to 4} \frac{-\cancel{(x-4)}}{4x} \frac{1}{\cancel{(x-4)}} \\
&= \lim_{x\to 4} \frac{-1}{4x} \\
&= -\frac{1}{16}
\end{aligned}$$

4.7 Limites et continuité de fonctions définies par morceaux

Rappel Une fonction définie par morceaux est une fonction dont la règle de définition comporte plusieurs cas mutuellement exclusif.

Exemple 4.17. La fonction **valeur absolue** est une fonction définie par morceaux :

$$|x| \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Ainsi, si on évalue $|3|$, comme $3 \geq 0$, c'est la première ligne de la définition qui doit être utilisée. Cela donne que $|3|=3$.

Si on évalue plutôt $|-3|$, comme $-3 < 0$, c'est la seconde ligne de la définition qui doit être utilisée. Cela donne que $|-3| = -(-3) = 3$.

Pour évaluer une limite avec $x \to a$, ont vérifie dans quelle partie de la fonction on se trouve : est-ce que si x est assez près de a, x vérifie une des conditions ou se trouve plutôt à la « frontière » entre deux conditions ?

Exemple 4.18.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} |x| &= \lim_{x\to 2} x \qquad \text{(hyp 2, car } |x| = x \text{ près de } x = 2) \\
&= 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-3}|x| &= \lim_{x\to-3} -x \qquad (\text{car } |x| = -x \text{ près de } x = -3)\\ &= -(-3)\\ &= 3\end{aligned}$$

Pour évaluer

$$\lim_{x\to0}|x|$$

nous devons séparer la limite en limite à droite et limite à gauche car 0 est une valeur « frontière ».

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}|x| &= \lim_{x\to0} x \qquad (\text{car } |x| = x \text{ si } x \geq 0)\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^-}|x| &= \lim_{x\to0} -x \qquad (\text{car } |x| = -x \text{ si } x < 0)\\ &= -0\\ &= 0\end{aligned}$$

Comme les limites à gauche et à droite coïncident,

$$\lim_{x\to0}|x| = 0.$$

4.8 Comparaisons de limites

Hypothèse 6. *Si $f(x) \leq g(x)$ pour toutes valeurs de x assez près de a, on a que*

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$$

quand ces deux limites existent.

On utilise souvent la conséquence suivante de la dernière hypothèse pour déterminer la valeur de certaines limites problématiques.

Théorème 4.2 (des gendarmes ou du Sandwich)**.** Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ pour tout les x assez près de a, on a que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L \implies \lim_{x\to a} g(x) = L$$

Démonstration. En utilisant l'hypothèse 6, on a que

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x) \leq \lim_{x\to a} h(x).$$

Si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$, l'inégalité précédente devient

$$L \leq \lim_{x\to a} g(x) \leq L.$$

Comme le seul nombre à la fois plus grand et plus petit que L est L lui-même, on doit avoir que

$$\lim_{x\to a} g(x) = L.$$

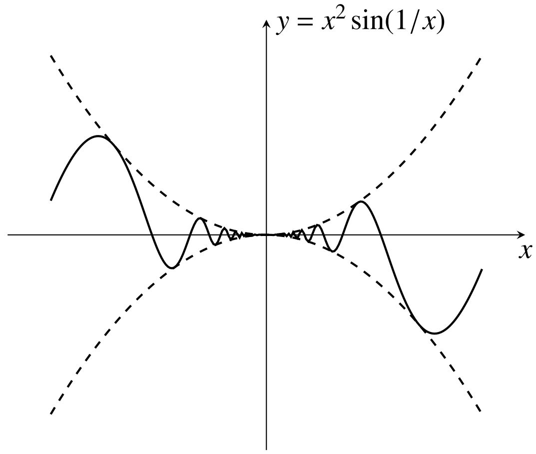
□

L'exemple suivant utilise la fonction sinus et le fait que $-1 \leq \sin(x) \leq 1$. Nous définirons et étudierons en détail la fonction sinus plus loin.

Exemple 4.19. Évaluons la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Sur ce graphique de la fonction $x^2 \sin(1/x)$, on voit que sont graphe est compris entre le graphe de $y = -x^2$ et celui de $y = x^2$.



Comme $-1 \leq \sin(1/x) \leq 1$, on doit avoir que

$$-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2.$$

On doit donc avoir que

$$\lim_{x\to 0} -x^2 \leq \lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x\to 0} x^2,$$

en évaluant on trouve que

$$0 \leq \lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 0.$$

Il faut donc que

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

,