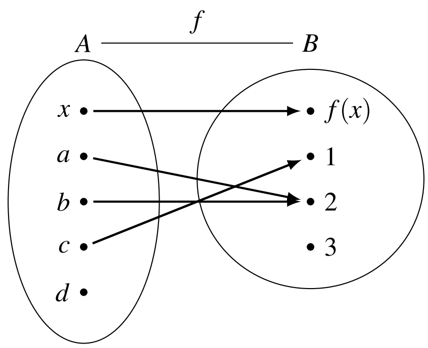
Résumé : fonctions élémentaires

Définition d'une fonction

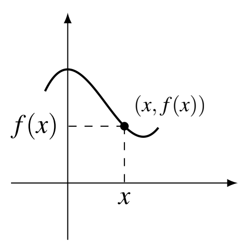
Notation et représentation graphique

Une fonction est une règle donnant au plus un élément $f(x)$ d'un ensemble B associé à chaque élément x de A. Notation : $f: A \to B$.



Le plus souvent dans les cours du collégial, A et B sont des ensembles de nombres réels ou de vecteurs $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, etc. Les fonctions $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont appelées *fonctions réelles*. Les fonctions réelles sont habituellement représentées par leur graphe.

Le graphe d'une fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est l'ensemble des points de la forme $(x, f(x))$.



Domaine

Le domaine d'une fonction $f: A \to B$ est l'ensemble des $x \in A$ où $f(x)$ est défini. Notation :

$$\mathrm{dom}(f) = \{a \mid f(a) \text{ est défini}\}.$$

Conditions déterminant le domaine des fonctions élémentaires :

$\cancel{\div 0}$ $\quad \frac{A}{B}$ défini $\iff B \neq 0$

$\cancel{\sqrt{<0}}$ $\quad \sqrt[n]{A}$ défini $\iff n$ impair ou n pair et $A \geq 0$

$\cancel{\log(\leq 0)}$ $\quad \log_b(A)$ défini $\iff A > 0$

Différentes manières de définir une fonction

- Définition par une équation : $y = x^2$.
- Définition implicite par une équation : $x^2 - y = 0$.
- Définition en donnant l'effet de la fonction $f(x) = x^2$ ou encore $x \mapsto x^2$.
- Définition par parties (ou par morceaux) :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 1 \\ -x & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x^3 & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

Évaluation d'une fonction

Si f est définie par une expression algébrique, comme $f(x) = x^2 + x + 1$, on évalue $f(A)$ en remplacent toutes les occurrences de x de l'expression albébrique par A. Par exemple

$$f(2) = 2^2 + 2 + 1$$

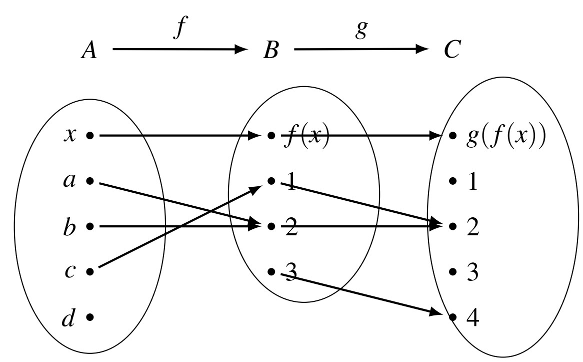
$$f(x+1) = (x+1)^2 + (x+1) + 1$$

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 + (x+\Delta x) + 1$$

Composition de fonctions

Si $f: A \to B$ et $g: B \to C$, on définit la composition $f \circ g$ de f et g comme la fonction définie en appliquant d'abord g et ensuite f :

$$f \circ g(x) = f(g(x)).$$



Fonctions inverses

Deux fonctions f et g sont inverses l'une de l'autre si

$$f \circ g(x) = x \text{ et } \; g \circ f(x) = x.$$

On dénote la fonction inverse de f par f^{-1}.

Les fonctions inverses satisfont l'équivalence

$$f(x) = y \iff x = f^{-1}(y).$$

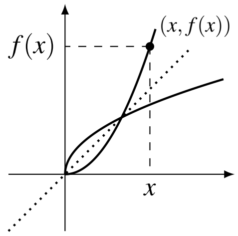
Si $y = f(x)$, on trouve donc f^{-1} en isolant x en fonction de y (si cela est possible) et en échangeant les x pour des y.

$$y = 2x + 1 \iff x = \frac{y-1}{2}$$

Donc $f(x) = 2x + 1$ a comme fonction inverse $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$.

La nouvelle relation trouvé de cette manière n'est pas nécessairement une fonction. Il faut souvent limiter f sur un domaine adéquat pour que f^{-1} soit une fonction.

Le graphe de la fonction inverse d'une fonction f est sa réflexion par la droite $y=x$ (qui a pour effet d'échanger x et y).

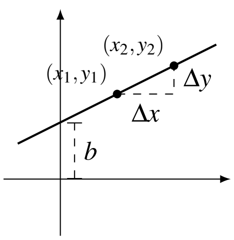


Quelques fonctions inverses (C = constante)

$y=f(x) \iff x=f^{-1}(y)$	
$y=x+C \iff x=y-C$	
$y=Cx \iff x=\dfrac{y}{C}$	
$y=x^2 \iff x=\sqrt{y}$	$(x \geq 0)$
$y=b^x \iff x=\log_b(y)$	
$y=\mathrm{e}^x \iff x=\ln(x)$	
$y=\sin(x) \iff x=\arcsin(y)$	$(-\pi/2 \leq x \leq \pi/2)$
$y=\cos(x) \iff x=\arccos(y)$	$(0 \leq x \leq \pi)$
$y=\tan(x) \iff x=\arctan(y)$	$(-\pi/2 < x < \pi/2)$

Fonctions polynomiales

Fonctions linéaires



Forme générale :

$$f(x)=ax+b$$

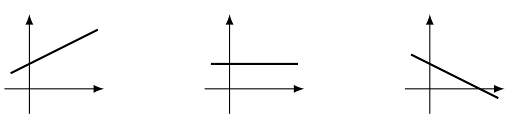
Passant par le point (x_0, y_0) et de pente a :

$$f(x)=a(x-x_0)+y_0$$

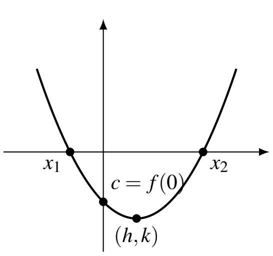
Ordonnée à l'origine : $b=f(0)$

Pente : $a=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$a>0$ $\qquad$ $a=0$ $\qquad$ $a<0$



Fonctions quadratiques



Forme polynomiale

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

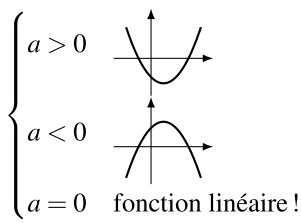
Forme canonique

$$f(x)=a(x-h)^2+k$$

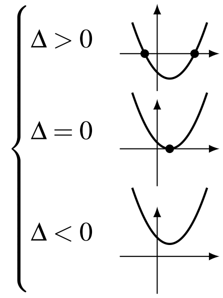
Forme factorisée

$$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$$

Orientation



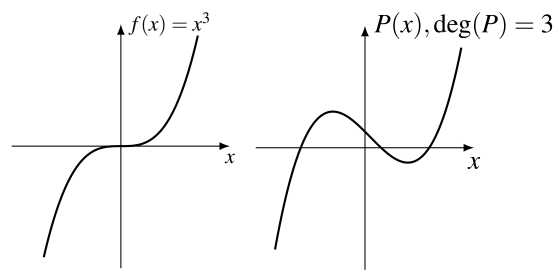
Discriminant $\Delta=b^2-4ac$

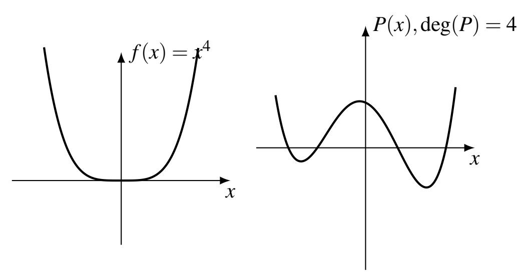


Si on connait trois points différents sur une parabole (en comptant le sommet pour deux), on peut déterminer tous les paramètres (et donc une fonction unique).

Fonctions polynomiales quelconques

Forme générale : $f(x)=P(x)$, où $P(x)$ est un polynôme. Domaine : $\mathrm{dom}(f)=\mathbb{R}$.





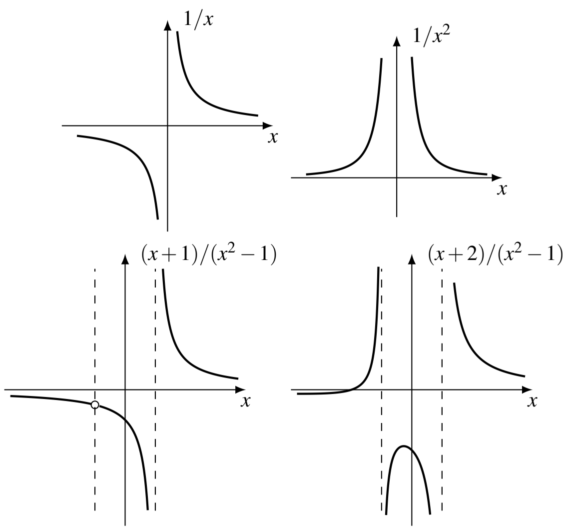
Zéros et extrémums.

- $f(x)$ peut avoir jusqu'à $\deg(P)$ zéros.
- $f(x)$ peut avoir jusqu'à $\deg(P)-1$ extremums.

Fonctions rationnelles

Forme générale : $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes. $\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$, asymptote ou discontinuité non essentielle à chaque $x \notin \mathrm{dom}(f)$.

Les zéros de $f(x)$ sont les zéros de $P(x)$ qui sont dans $\mathrm{dom}(f)$.

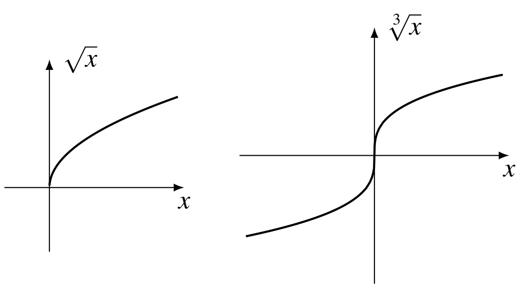


Fonctions algébriques

Fonctions que l'on peut définir à l'aide des opérations $+, -, \times$ et $\div$, ainsi que des exposants fractionnaires. Toutes les fonctions rationnelles sont algébriques. Ce sont les fonctions que l'on obtient en isolant y dans des équations polynomiales de la forme $P(x,y) = 0$.

Pour déterminer le domaine d'une fonction algébrique, il faut utiliser les deux faits suivants :

- $\frac{A}{B}$ est défini ssi $B \neq 0$
- $\sqrt[n]{A}$ est toujours défini si n est impair, ou est défini ssi $A \geq 0$ si n est pair.

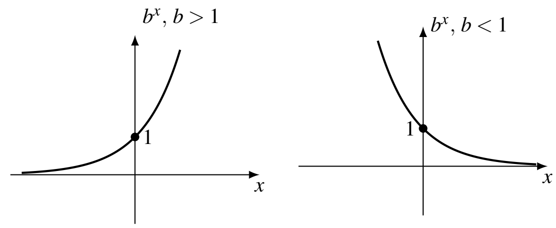


Fonctions transcendantes

Une fonction transcendante est une fonction qui n'est pas algébrique.

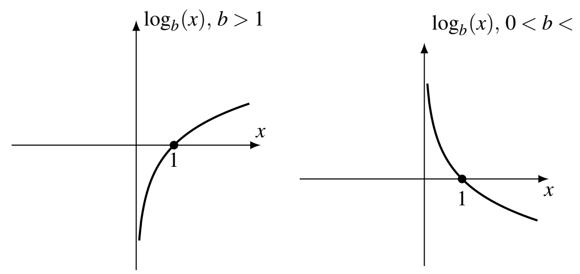
Fonctions exponentielles

Forme générale : $f(x) = Ab^x + k$, $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$



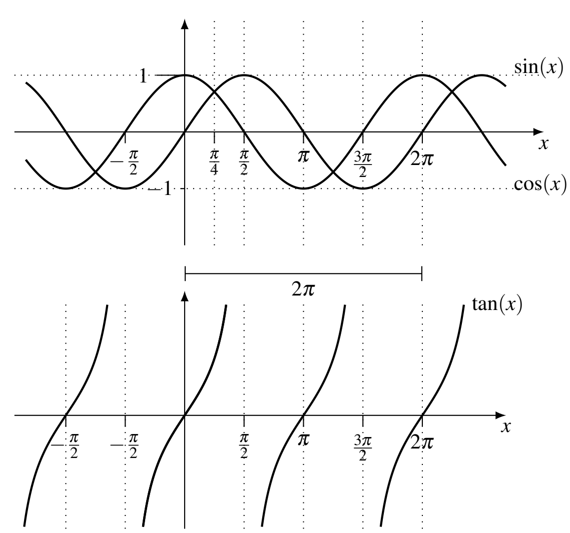
Fonctions logarithmiques

Forme générale : $f(x) = A\log_b(x-a) + C$ $(b > 0, b \neq 1)$,
$\mathrm{dom}(f) = \{x \mid x - a > 0\}$



Fonctions trigonométriques

$$f(x) = \sin(x),\ \mathrm{dom}(\sin) = \mathbb{R} \qquad g(x) = \cos(x),\ \mathrm{dom}(\cos) = \mathbb{R}$$
$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \mathrm{dom}(\tan) = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\tfrac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

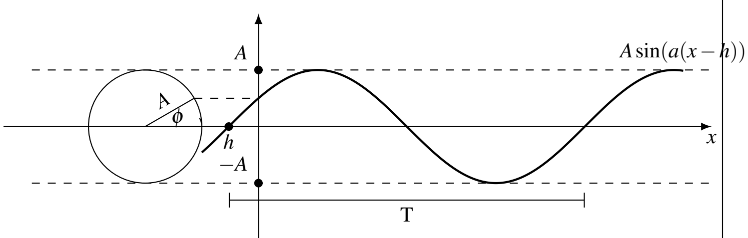


Fonctions sinusoïdales

Forme générale :

$$\begin{aligned} f(x) &= A\sin(\omega(x-h))+k && \text{Déphasage temporel} \\ &= A\sin(\omega x+\phi)+k && \text{Déphasage angulaire} \\ \mathrm{dom}(\sin) &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

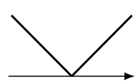
Amplitude : A	Déphasage (temps) : $h = -\frac{\phi}{\omega}$
Vitesse angulaire ω	Déphasage (angle) : $\phi = -\omega h$
Période : $T = \frac{2\pi}{\omega}$	



Fonctions définies par morceaux

Valeur absolue

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



Propriétés de fonctions

Périodique (période T) $f(x+T) = f(x)$ (ex : $\sin(x)$)

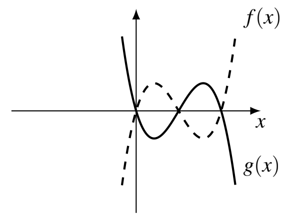
Paire $f(-x) = f(x)$ (ex : x^2, $\cos(x)$)

Impaire $f(-x) = -f(x)$ (ex : x^3, $\sin(x)$)

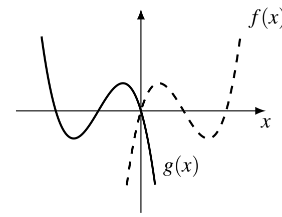
Transformation du graphe d'une fonction

Symétries

Symétrie par rapport à l'axe des x $g(x) = -f(x)$



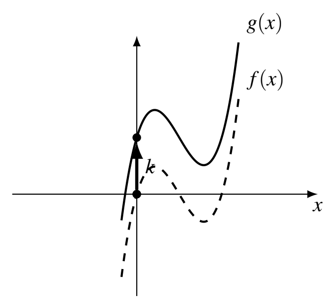
Symétrie par rapport à l'axe des y $g(x) = f(-x)$



Translation verticales et horizontales

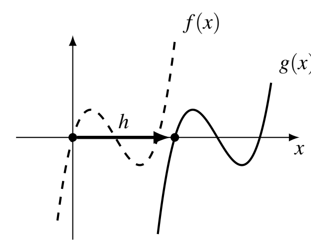
Translation verticale de k :

$$g(x) = f(x) + k$$



Translation horizontale de h :

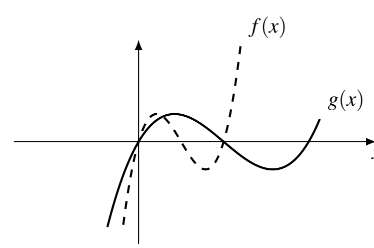
$$g(x) = f(x-h).$$



Changements d'échelles

Facteur b horizontal :

$$g(x) = f\left(\frac{x}{b}\right)$$



Facteur a vertical :

$$g(x) = af(x).$$