# Formulaire algèbre

## Priorité des opérations

1) Parenthèses
2) Exposants et racines
3) Produits et divisions, de gauche à droite
4) Addition et soustractions, de gauche à droite

## Propriétés des opérations élémentaires

$A+B=B+A$ (Commutativité de $+$)

$A+(B+C)=(A+B)+C$ (Associativité de $+$)

$0+A=A+0=A$ (0 est neutre pour $+$)

$A+(-A)=(-A)+A=0$ (inverse pour $+$)

$AB=BA$ (Commutativité $\times$)

$0A=0A=0$ (0 est absorbant pour $\times$)

$AB=0 \implies A=0$ ou $B=0$ (produit nul)

$1A=A1=A$ (1 est neutre pour $\times$)

$A\frac{1}{A}=\frac{1}{A}A=1$ (inverse pour $\times$)

$A(B+C)=AB+AC$ (distributivité de $\times$ sur $+$)

## Propriété des fractions

$\frac{1}{A}$ non défini pour $A=0$ (Division par zéro)

$A\frac{1}{B}=\frac{A}{B}=\frac{1}{B}A$ (Notation fractionnaire)

$\frac{A}{B}=\frac{C}{D} \iff AD=BC$ (Égalité de fractions)

$\frac{1}{1/A}=A$ (Inverse de l'inverse)

$\frac{AC}{BC}=\frac{A}{B}$ (Facteur commun)

$\frac{A}{B}+\frac{C}{B}=\frac{A+C}{B}$ (Somme, même déno.)

$\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{AD+CB}{BD}$ (Somme, déno. commun)

$\frac{A}{B}\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}$ (produit)

$\frac{A/B}{C/D}=\frac{A}{B}\frac{D}{C}$ (division)

## Exposants et racines

$A^n \overset{\text{def}}{=} \underbrace{A\cdot A\cdots A\cdot A}_{n \text{ fois}}$ (définition)

$A^nA^m=A^{n+m}$ (produit de puissances)

$(A^n)^m=A^{nm}$ (puissance de puissance)

$A^0=1$ (exposant zéro)

$A^{-n}=\frac{1}{A^n}$ (inverse de puissance)

$\sqrt[n]{A}$ est défini si $n$ impair, ou si $n$ pair et $A\geq 0$

$A^{1/n}=\sqrt[n]{A}$ (puissance fractionnaire)

$(AB)^n=A^nB^n$ (puissance d'un produit)

$\sqrt[n]{AB}=\sqrt[n]{A}\sqrt[n]{B}$ (racine d'un produit)

$\left(\frac{A}{B}\right)^n=\frac{A^n}{B^n}$ (puissance d'un quotient)

$\sqrt[n]{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}$ (racine d'un quotient)

$\sqrt[n]{A}=A$ si $A\geq 0$ $\quad \sqrt[n]{A^n}=\begin{cases}|A| & \text{si } n \text{ pair}\\ A & \text{si } n \text{ impair}\end{cases}$

## Exposants et logarithmes

$\log_b(A)=B \iff b^B=A$ (définition de logarithme)

$\log_b(b^A)=A$ (logarithme d'une puissance est l'exposant)

$b^{\log_b(A)}=A$ (puissance du logarithme est la base)

$\log_b(1)=0$ (logarithme de l'unité est zéro)

$\log_b(AB)=\log_b(A)+\log_b(B)$ (logarithme d'un produit)

$\log_b\left(A^B\right)=B\log_b(A)$ (logarithme d'une puissance)

$\log_b(A)=\frac{\log_c(A)}{\log_c(b)}$ (changement de base)

## Identités algébriques fréquemment utilisées

$AB+AC=A(B+C)$ (mise en évidence simple)

$AC+AD+BC+BD=(A+B)(C+D)$ (mise en évidence double)

$\frac{A}{\sqrt{B}}=\frac{A\sqrt{B}}{B}$ (rationalisation)

$A^2-B^2=(A-B)(A+B)$ (différence de carrés)

$\left(\sqrt{A}\pm\sqrt{B}\right)\left(\sqrt{A}\mp\sqrt{B}\right)=A-B$ (conjugué)

$A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$ (différence de cubes)

$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ (binôme carré parfait)

$(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$ (développement du binôme degré 3)

$(A+B)^4=A^4+4A^3B+6A^2B^2+4AB^3+B^4$ (développement du binôme degré 4)

Coefficients du développement d'un binôme de degré quelconque :

**Triangle de Pascal**

| | |
|---|---|
| $(A+B)^0$ | 1 |
| $(A+B)^1$ | 1 1 |
| $(A+B)^2$ | 1 2 1 |
| $(A+B)^3$ | 1 3 3 1 |
| $(A+B)^4$ | 1 4 6 4 1 |
| $(A+B)^5$ | 1 5 10 10 5 1 |
| $(A+B)^6$ | 1 6 15 20 15 6 1 |
| $\vdots$ | $\vdots$ |

# Résolution d'équations

**Principes généraux**

(Transitivité) $A=B$ et $B=C$ alors $A=C$.

(Application d'une opération) Si $f(x)$ est une opération (fonction), on a que

$$A=B \implies f(A)=f(B).$$

Si $f$ est une opération inversible, alors $A=B \iff f(A)=f(B)$. Si $f^{-1}(x)$ est l'opération inverse de $f(x)$, alors

$$f(A)=B \iff A=f^{-1}(B).$$

(Substitution) si $A(x)=B(x)$ alors $A(C)=B(C)$, où $C$ est une expression algébrique quelconque substituée à la place de la variable $x$.

**Autres principes fréquemment utilisés**

$\dfrac{A}{B}=0 \iff A=0$ et $B\neq 0$

$\dfrac{A}{B}=\dfrac{C}{D} \iff AD=BC$ et $B,D\neq 0$

**Opérations inverses usuelles**

$A+C=B \iff A=B-C$

$CA=B \iff A=\dfrac{1}{C}B$ si $C\neq 0$.

$A^n=B \iff A=\pm\sqrt[n]{B}$ si $n$ pair.

$A^n=B \iff A=\sqrt[n]{B}$ si $n$ impair.

$b^A=B \iff \log_b(B)=A$ si $B>0$.

$\sin(A)=B \iff A=\arcsin(B)$ si $-\dfrac{\pi}{2}\leq A\leq\dfrac{\pi}{2}$

$\cos(A)=B \iff A=\arccos(B)$ si $0\leq A\leq\pi$

$\tan(A)=B \iff A=\arctan(B)$ si $-\dfrac{\pi}{2}<A<\dfrac{\pi}{2}$

# Zéros de polynômes

**Forme factorisée**

Un polynôme factorisé comme

$$P(x)=c(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$$

a comme zéros $a_1$, $a_2$,..., $a_n$.

**Division polynômiale avec reste**

Soit $P(x)$ et $D(x)$ des polynômes en $x$. On peut toujours trouver des polynômes $Q(x)$ (le quotient) et $R(x)$ (le reste), avec $\deg(R(x))<\deg(Q(x))$ tels que

$$P(x)=D(x)Q(x)+R(x)$$

On peut écrire sous forme fractionnaire :

$$\frac{P(x)}{D(x)}=Q(x)+\frac{R(x)}{D(x)}.$$

Exemple

$$\begin{array}{l|l}
x^3-x^2+3x-4 & x^2-1 \\ \cline{2-2}
x^3-x & x-1 \text{ reste } 4x-3 \\ \cline{1-1}
-x^2+4x-4 & \\
-x^2+1 & \\ \cline{1-1}
4x-3 &
\end{array}$$

$$x^3-x^2+3x-4=(x-1)(x^2-1)+(4x-3)$$

$$\frac{x^3-x^2+3x-4}{x-1}=(x^2-1)+\frac{4x-3}{x-1}$$

**Équations quadratiques**

Formule quadratique :

$$ax^2+bx+c=0 \iff x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Identités utiles pour le passage entre les différentes formes d'une équation quadratique :

Si $u$ et $v$ sont les zéros du polynôme $ax^2+bx+c$, on a que $ax^2+bx+c=a(x-u)(x-v)$

$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ (Factorisation produit-somme)

$A^2+2bA=A^2+2bA+b^2-b^2=(A+b)^2-b^2$ (Complétion de carrés)

**Théorèmes de factorisation**

**Théorème 1.** *Soit $P(x)$ un polynôme. La valeur $a$ est un zéro de $P(x)$ si et seulement si $(x-a)$ est un facteur de $P(x)$ :*

$$P(a)=0 \iff P(x)=(x-a)Q(x).$$

**Théorème 2.** *Les polynômes réels irréductibles sont de l'une des deux formes suivantes :*

*degré 1 de la forme $c(x-a)$ (a est nécessairement un zéro)*

*degré 2 de la forme $ax^2+bx+c$, où $b^2-4ac<0$. (polynôme de degré deux sans zéros).*

**Théorème 3** (Théorème fondamental de l'algèbre)**.** *Tout polynôme réel peut s'écrire comme un produit d'une constante et de polynômes irréductibles, unique à l'ordre des facteurs près.*