Limites

Question 1
En utilisant le tableau de valeurs donné, déterminer la valeur de la limite

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

et comparer le résultat avec $f(a)$.

a) $\lim_{x\to 2} x^3$

x	$f(x)$
3.00000000000000	27.0000000000000
2.00097656250000	8.01172447297722
2.00001693508781	8.00020322277449
2.00000095367432	8.00001144409725
2.00000010240000	8.00000122880006
2.00000001653817	8.00000019845806
2.00000000354013	8.00000004248160
2.00000000093132	8.00000001117587
2.00000000028680	8.00000000344157
2.00000000010000	8.00000000120000

b) $\lim_{x\to -2^-} x^2-4$

x	$f(x)$
-3.00000000000000	5.00000000000000
-2.03125000000000	0.125976562500000
-2.00411522633745	0.0164778404376023
-2.00097656250000	0.00390720367431641
-2.00032000000000	0.00128010239999909
-2.00012860082305	0.000514419830352608
-2.00005949901827	0.000237999613197815
-2.00003051757812	0.000122071243822575
-2.00001693508781	0.0000677406380313883
-2.00001000000000	0.0000400001000002703

c) $\lim_{x\to -2^+} x^2-4$

x	$f(x)$
-1.00000	-3.00000
-1.93750	-0.246094
-1.98765	-0.0492303
-1.99609	-0.0156097
-1.99840	-0.00639749
-1.99923	-0.00308609
-1.99958	-0.00166583
-1.99976	-0.000976562
-1.99985	-0.000609875
-1.99990	-0.000400066

d) $\lim_{x\to -2} x^2-4$

x	$f(x)$
-1.00000	-3.00000
-2.06250	0.253906
-1.98765	-0.0492303
-2.00391	0.0156403
-1.99840	-0.00639749
-2.00077	0.00308657
-1.99958	-0.00166583
-2.00024	0.000976562
-1.99985	-0.000609875
-2.00010	0.000399590

e) $\lim_{x\to 2} \sqrt{x-2}$

x	$f(x)$
3.00000	1.00000
2.03125	0.176777
2.00412	0.0641509
2.00098	0.0312500
2.00032	0.0178874
2.00013	0.0113361
2.00006	0.00772040
2.00003	0.00552427
2.00002	0.00411433
2.00001	0.00316442

f) $\lim_{x\to 3} \sqrt{x^2-9}$

x	$f(x)$
4.00000	2.64575
3.03125	0.434139
3.00412	0.157190
3.00098	0.0765528
3.00032	0.0438149
3.00013	0.0277763
3.00006	0.0189111
3.00003	0.0135316
3.00002	0.0101016
3.00001	0.00775122

g) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$

x	$f(x)$
0	1.00
4	0.200
9	0.100
29	0.0333
49	0.020
69	0.014
99	0.010
999	0.0001

h) $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x}$

x	$f(x)$
-1.00000000000000	-1
-0.0312500000000000	-32
-0.00411522633744856	-243
-0.000976562500000000	-1024
-0.000320000000000000	-3125
-0.000128600823045268	-7776
-0.0000594990182661986	-16807
-0.0000305175781250000	-32768
-0.0000169350878084303	-59049
-0.0000100000000000000	-100000

i) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$

x	$f(x)$
1	1
-0.0312500	-32
0.00411523	243
-0.000976562	-1024
0.000320000	3125
-0.000128601	-7776
0.0000594990	16807
-0.0000305176	-32768
0.0000169351	59049
-0.0000100000	-100000

j) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$

x	$f(x)$
0.000000	1.00000
1.03125	0.492308
0.995885	0.501031
1.00098	0.499756
0.999680	0.500093
1.00013	0.500000
0.999941	0.500000
1.00003	0.500000
0.999983	0.500000
1.00001	0.500000

k) $\lim_{x \to -1} \frac{x-1}{x^2-1}$

x	$f(x) \approx$
-1.1250	-8
-1.0370	-27
-1.0156	-64
-1.0080	-125
-1.0046	-216
-1.0029	-343
-1.0020	-512
-1.0013	-729
-1.0010	-1000

Question 2

Déterminer la valeur des limites $\lim_{x \to a} f(x)$ suivantes avec un tableau de valeurs et comparer avec la valeur de $f(a)$.

a) $\lim_{x \to -3} x^3$

b) $\lim_{x \to 1} x-2$

c) $\lim_{x \to -1} x^3+1$

d) $\lim_{x \to 3} \sqrt{x-2}$

e) $\lim_{x \to 1} \sqrt{x-2}$

f) $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2}$

g) $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2}$

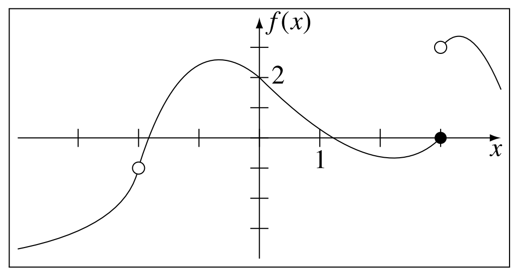
h) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$

i) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-1}$

j) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

Question 3

Évaluer, s'ils existent, les nombres suivants en se basant sur le graphique de la fonction f.



a) $f(-2)$

b) $\lim_{x \to (-2)^-} f(x)$

c) $\lim_{x \to (-2)^+} f(x)$

d) $\lim_{x \to -2} f(x)$

e) $f(3)$

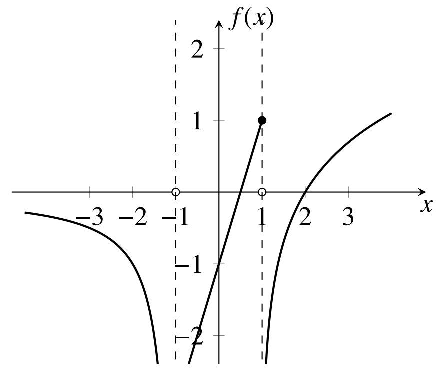
f) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$

g) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$

h) $\lim_{x \to 3} f(x)$

Question 4

Déterminer la valeur des limites suivantes à l'aide du graphique suivant.



a) $f(-1)$

b) $\lim_{x \to (-1)^-} f(x)$

c) $\lim_{x \to (-1)^+} f(x)$

d) $\lim_{x \to -2} f(x)$

e) $f(1)$

f) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$

g) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$

h) $\lim_{x \to 1} f(x)$

i) $\lim_{x \to 2} f(x)$

Question 5
Pour chacune des fonctions suivantes, trouver intuitivement (soit en faisant une esquisse du graphique ou en tentant une approche numérique) les limites

$$\lim_{x\to 0} f(x) \text{ et } \lim_{x\to 3^+} f(x).$$

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}$

e) $f(x) = \log_3(x)$

f) $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-9}$

Question 6
Pour chacun des cas ci-dessous, tracer l'esquisse d'une fonction ayant les propriétés indiquées.

a) $f(0) = -5,\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = 2$ et $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 6$

b) $f(-4)\nexists$ et $\lim_{x\to -4} f(x) = 2$

c) $f(3) = 8$ et $\lim_{x\to 3} f(x) = 0$

d) $\lim_{x\to 8} f(x)\nexists$

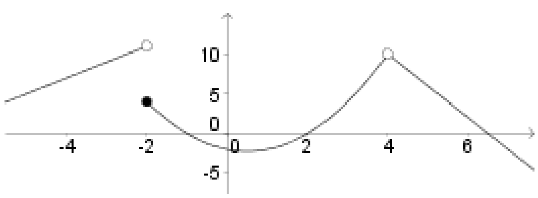
e) $\lim_{x\to(-10)^-} f(x) = \infty$ et $\lim_{x\to(-10)^+} f(x) = -\infty$

f) $\lim_{x\to 5} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 1$

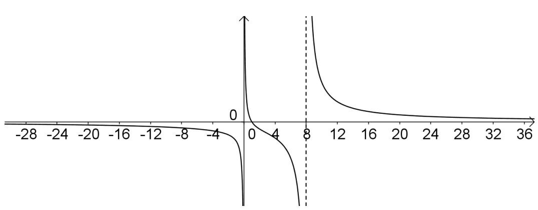
g) $f(5) = -5,\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = \infty$ et $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$

Question 7
Pour chacune des fonctions suivantes, donner tous les points de discontinuité et indiquer le type de discontinuité.

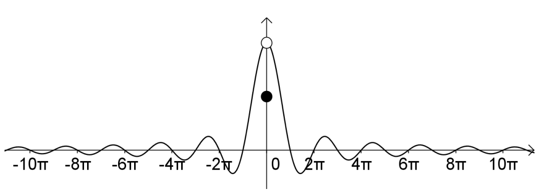
a)



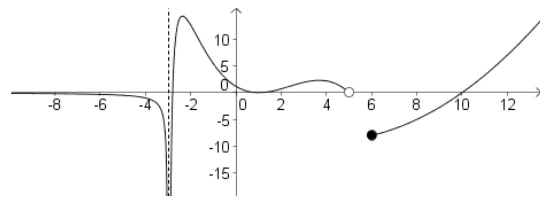
b)



c)

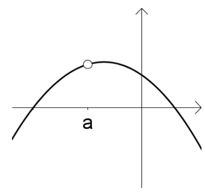


d)

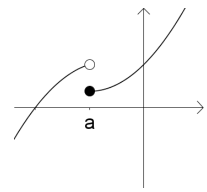


Question 8
Dans chacun des cas suivants, dire si f est continue, continue à gauche, continue à droite ou discontinue au point $x = a$.

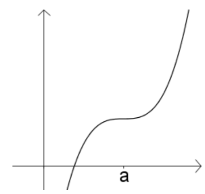
a)



c)

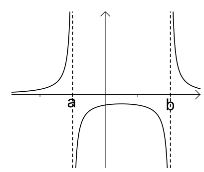


b)

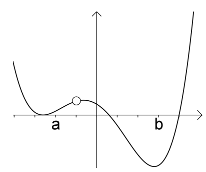


Question 9
Soient les fonctions illustrées ci-dessous.

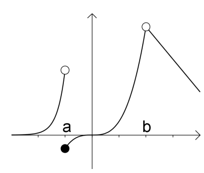
(i)



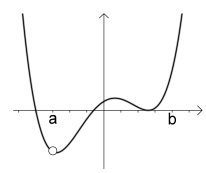
(iv)



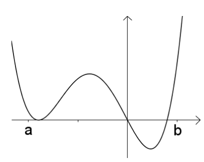
(ii)



(v)



(iii)



a) Quelle(s) fonctions sont continues sur l'intervalle $]a,b[$?

b) Quelle(s) fonctions sont continues sur l'intervalle $[a,b[$?

c) Quelle(s) fonctions sont continues sur l'intervalle $]a,b]$?

d) Quelle(s) fonctions sont continues sur l'intervalle $[a,b]$?

Évaluation de limites

Question 10
Quatre des propriétés de base pour l'évaluation de limites sont les suivantes :

(AL1) $\lim_{x\to a} C = C$ (C = constante)
(AL2) $\lim_{x\to a} x = a$
(AL3) $\lim_{x\to a} f(x)+g(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$, si les deux limites du membre de droite existent.
(AL4) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$, si les deux limites du membre de droite existent.

Évaluer la limite

$$\lim_{x\to 2} 3x^2+1$$

en n'utilisant que les propriétés (AL1) à (AL4) et en disant à chaque étape quelle propriété est utilisée.

Question 11
Démontrer que

$$\lim_{x\to a} f(x)-g(x) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$

si les limites du membre de droite existent en n'utilisant que les quatre propriétés des limites données à la question précédente. À chaque étape de votre démonstration, indiquer quelle propriété est utilisée.

Question 12
Évaluer, si possible, les limites demandées en utilise les propriétés des limites et en sachant que

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 5 \qquad \lim_{x\to 1} g(x) = -3$$
$$\lim_{x\to 5} h(x) = 10 \qquad \lim_{x\to 5} g(x) = 7.$$

a) $\lim_{x\to 1}\left(f(x)+g(x)\right)$
b) $\lim_{x\to 1} 3f(x)$
c) $\lim_{x\to 1}\left(3f(x)-2g(x)\right)$
d) $\lim_{x\to 1}\left(f(x)+h(x)\right)$
e) $\lim_{x\to 1}\left(f(x)\cdot g(x)\right)$
f) $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)}$
g) $\lim_{x\to 1} g(f(x))$
h) $\lim_{x\to 1} f(g(x))$

Question 13
Évaluer les limites suivantes.

a) $\lim_{x\to 3} 2x-1$
b) $\lim_{x\to 2} x^3-x^2+2x-1$
c) $\lim_{x\to 2} \frac{2-x}{3-x^2}$
d) $\lim_{x\to 2} \frac{(2-x)^2}{4+x^2}$
e) $\lim_{x\to 2} \sqrt{x-2}$
f) $\lim_{x\to 2} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^2}$
g) $\lim_{x\to 2} (x-1)(x+1)$
h) $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} x\sin(x)$
i) $\lim_{x\to -\frac{\pi}{8}} \tan(2x)$
j) $\lim_{x\to 2} 3^{\left(x^2-4\right)}$
k) $\lim_{x\to 8} \frac{\log_2(x)}{x-5}$
l) $\lim_{x\to 3} \sqrt{\frac{x^2-1}{x+1}}$

Question 14
Soit la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x<0 \\ 3-x & \text{si } 0\le x<3 \\ 2x-6 & \text{si } x>3. \end{cases}$$

Déterminer les quantités suivantes.

a) $f(0)$
b) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$
c) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$
d) $\lim_{x\to 0} f(x)$
e) $f(1)$
f) $\lim_{x\to 1} f(x)$
g) $f(3)$
h) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$
i) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$
j) $\lim_{x\to 3} f(x)$
k) $f(5)$
l) $\lim_{x\to 5} f(x)$

Question 15
Évaluer les limites suivantes.

a) $\lim_{x\to 1^-} \sqrt{x^2-1}$ b) $\lim_{x\to 1^+} \sqrt{x^2-1}$ c) $\lim_{x\to 1} \sqrt{x^2-1}$

Question 16
De quel(s) côté(s) les limites suivantes existent elles ?

a) $\lim_{x\to 5^\pm} \sqrt{x-5}$
b) $\lim_{x\to (-\frac{2}{3})^\pm} \sqrt{2+3x}$
c) $\lim_{x\to 8^\pm} \sqrt[3]{8-x}$
d) $\lim_{x\to 2^\pm} \sqrt[6]{-x^2-x+6}$
e) $\lim_{x\to 2^\pm} \ln\left(x^2-4x+4\right)$
f) $\lim_{x\to (-3)^\pm} \sqrt{\frac{x^2-9}{x+3}}$

Formes indéterminées « $\frac{0}{0}$ »

Question 17
Dans le contexte de l'étude des limites, quelle est la différence entre les expressions « n'existe pas »et « indéterminée » ?

Question 18
Évaluer les limites suivante en levant l'indétermination.

a) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-25}{x-5}$

b) $\lim\limits_{x\to \sqrt{3}} \dfrac{x^2-3}{x-\sqrt{3}}$

c) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-25}{(x-5)(x+1)}$

d) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-x-12}{16-x^2}$

e) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{-x^3+3x^2-x+3}{x^2-9}$

f) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+4x+4}{x^2+4x+6}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3+13x}{2x^2+x}$

h) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-4x^2-x+12}{2x^3-x-51}$

Question 19
Évaluer les limites suivantes en mettant au dénominateur commun.

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}{x-3}$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}$

c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}{9-x^2}$

d) $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}} \dfrac{\sqrt{2}-x}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}}$

e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{x+3}-\frac{1}{5}}$

f) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x+2}-1}$

g) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{9}}{x^2-9}$

h) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\frac{1}{x^3}-\frac{1}{27}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}$

Question 20
Évaluer les limites suivantes en simplifiant le facteur problématique.

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2-5x+2}{x^2+2x-8}$

b) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}} \dfrac{3x^2-4x+1}{3x^2-10x+3}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+2x}{x^3-x^2}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-4x^2+5x-2}$

e) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^4-81}{x-3}$

f) $\lim\limits_{x\to -1} \sqrt{\dfrac{2x^2+7x+5}{x+1}}$

g) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\frac{1}{x+3}+\frac{x^2-1}{2x+1}}{x-\frac{x-2}{x+4}}$

h) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{3+\frac{x^2-16}{x^2+x-12}}{x+1}$

Question 21
Évaluer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to 0} |x|$

b) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$

e) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{|x-2|}{x-2}$

f) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{|x-2|}{x-2}$

g) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x-2|}{x-2}$

Question 22
Utiliser le conjugué pour simplifier les expressions suivantes.

a) $\dfrac{-4}{1-\sqrt{5}}$ b) $\dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}}$ c) $\dfrac{5+3x}{2+\sqrt{3x+1}}$

Question 23
Évaluer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

b) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{1}{\sqrt{x}-3}$

c) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x+5}-2}{x^2-4x-5}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{5}}$

e) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4}$

Question 24
Utiliser les deux formes de la définition de la dérivée à l'aide de limites pour calculer $f'(2)$ si $f(x) = x^3$.

Question 25
En utilisant la définition de la dérivée utilisant le concept de limite, évaluer les expressions demandées pour la fonction donnée.

a) $f'(2)$ pour $f(x) = 2x^2 - x$.

b) $\dfrac{dx}{dt}$ pour $x(t) = at^2 + bt + c$.

c) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=-1}$ pour $y = \sqrt{x^2+1}$.

d) $g'(x)$ pour $g(x) = \dfrac{2}{3x} - \dfrac{1}{3x^2}$.

e) $h'(0)$ pour $h(x) = \dfrac{-4x}{\sqrt{1-5x}}$.

Question 26

a) Calculer la valeur de $\sin(x)$ pour les valeurs suivantes de x

$$1 \quad 0,5 \quad 0,25 \quad 0,1 \quad 0,01 \quad 0.001.$$

(Attention : angles en radians !) Que peut-on remarquer ?

b) Selon les calculs précédents, vers quelle valeur semble s'approcher $\dfrac{\sin(x)}{x}$ lorsque x devient de plus en plus proche de 0 ?

c) Écrire le résultat précédent à l'aide de la notation usuelle des limites.

Rappelons que ces observations sur quelques cas ne sont pas suffisantes pour tirer une conclusion générale.

Dans les cours qui suivront, nous ferons une démonstration plus rigoureuse de ce résultat important. Cet exercice a pour but de vous faire « sentir »intuitivement qu'il est vrai.

Question 27
Utilisez le résultat de la question précédente pour évaluer les limites suivantes. (ind. Il faut transformer la fonction pour faire apparaitre des expressions de la forme $\frac{\sin(A)}{A}$ qui tendent vers 1.)

a) $\frac{\sin(3x)}{3x}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x}$

c) $\lim_{x\to 3} \frac{\sin(x-3)}{x^2-9}$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\tan(5x)}$

e) $\lim_{x\to \pi/2} \frac{\sin(x)}{x-\pi/2}$

Question 28
Évaluer les limites.

a) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+x-1}-1}{x^3-2x^2+5x-4}$

b) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+2x+1}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}$

c) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+2x-8}{\sqrt{x+2}-2}$

d) $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{4x-2}}$

Continuité

Question 29
Trouver toutes les discontinuités des fonctions données.

a) $f(x) = 4x^3-2x^2+5$

b) $f(x) = \frac{6x+15}{x-3}$

c) $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)(x+2)}$

d) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$

e) $f(x) = \cos\left(\frac{2}{x+3}\right)$

Question 30
Trouver toutes les discontinuités des fonctions données.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2+4x & \text{si} \quad x < -1 \\ \dfrac{-12x}{x-3} & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si} \quad x < 2 \\ \dfrac{7x+6}{x+3} & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ e^x - 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

Question 31
Déterminer les intervalles où les fonctions suivantes sont continues ?

a) $f(x) = 4^{1/x}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < -1 \\ \frac{2(x^2+3x-4)}{x^2-1} & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ -5 & \text{si } x = 1 \\ -4-x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \sqrt{x-3}$

d) $f(x) = \ln(x) + \frac{1}{x-5}$

e) $f(x) = (1-x)^{-5/3}$

f) $\log_2\left(x^2+2x+1\right)$

Question 32

a) Tracer une fonction définie sur l'intervalle fermé $[0,5]$ avec $f(0) < 0$ et $f(5) > 0$ qui n'admet aucun zéro dans l'intervalle $[0,5]$.

b) La fonction que vous avez donnée en (a) est-elle continue sur $[0,5]$?

c) Est-il possible qu'une fonction continue sur $[0,5]$ satisfasse aux conditions données en (a) ?

Question 33
Une compagnie de transport de colis définit son tarif comme suit : 2 \$ pour un colis de 1 kg ou moins ; pour un colis dont la masse se situe entre 1 kg et 10 kg, le coût en dollars est égal au double de la masse en kg ; pour un colis de 10 kg ou plus, le coût est égal au carré de la masse.

a) Donner la fonction déterminant le coût de transport en fonction de la masse du colis.

b) Quel est le domaine de cette fonction ?

c) Cette fonction est-elle continue sur son domaine ?

Question 34
Au Québec en 2008, tout citoyen ayant un revenu inférieur à 37500 \$ doit payer 16 % de son revenu en impôt. Si le revenu est de 37500 \$ ou plus, mais ne dépasse pas 75000 \$, l'impôt sera de 6000 \$ plus 20 % de ce qui excède 37500 \$. Pour un revenu de 75000 \$ ou plus, l'impôt à payer est de 13500 \$ plus 24 % de ce qui excède 75000 \$.

Certaines personnes disent que ce mode d'imposition est injuste car certains citoyens auront des revenus semblables mais paieront des impôts très différents. Ont-ils raison ? Justifier votre réponse. (*Indice : construire d'abord la fonction donnant l'impôt à payer en fonction du revenu, puis l'analyser.*)

Question 35
Si possible, attribuer une valeur à la constante k qui rendra f continue en tout point.

a) $f(x) = \begin{cases} 7x-2 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ kx^2 & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$

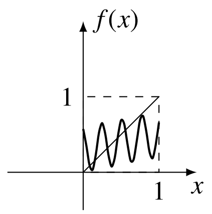
b) $f(x) = \begin{cases} kx^2 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ 2x+k & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 9-x^2 & \text{si} \quad x \leq -3 \\ \dfrac{k}{x^2} & \text{si} \quad x > -3 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 9-x^2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{k}{x^2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

Question 36
Soit $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$. Montrer que $f(x)$ a au moins un zéro en utilisant le théorème de la valeur intermédiaire.

Question 37
Soit $f(x)\colon [0,1] \to [0,1]$, c'est à dire une fonction qui prend comme argument des nombres dans l'intervalle $[0,1]$ et qui donne des valeurs dans $[0,1]$. Voici un exemple d'une telle fonction :



Montrer que si $0 < f(0) < 1$ et $0 < f(1) < 1$ (comme dans l'exemple) et que f est continue, alors il y a au moins une valeur $a \in (0,1)$ telle que $f(a) = a$ (un point où le graphe de f croise la droite $y = x$.)

Ind. Poser $g(x) = f(x) - x$ et appliquer TVI à la fonction g (comme dans l'exemple de la piscine).

Exercices récapitulatifs

Question 38
Évaluer les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{2x^2 - x + 3}{x - 3}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to(-4)^-} \sqrt{x+4}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to(-5)^+} \ln\left(25 - x^2\right)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x^2 - 5x - 14}{x^2 + 6x + 8}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x^2 - 2x}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(-2x)\tan(4x)}{2x^2}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{x - 1}$

Question 39
Trouver, si possible, des fonctions f et g satisfaisant les conditions suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 5} f(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to 5} [f(x)g(x)] = 4$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x) \nexists, \lim_{x\to 1} g(x) \nexists,$ mais $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} \exists$

Question 40
Évaluer les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{(x+4)(2x-3)}{x^7 + 2x^6 + x^3}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 27}{3 - x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 4x + 3}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \sqrt{\frac{-2x+3}{5x^2 - 1}}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{\frac{1}{x} - 1}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{x}{1-x} + \frac{3}{x^2 - 1}\right)$

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sec(x)\tan(x)}{x^2 \csc(x)}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+2x} - \sqrt{4+x^2}}{\sqrt{2-x^3} - \sqrt{2+x}}$

Solutions

Question 1

a) $\lim_{x\to 2} x^3 = 8$ et $f(2) = 8$

b) $\lim_{x\to -2^-} x^2 - 4 = 0^+$ et $f(-2) = 0$

c) $\lim_{x\to -2^+} x^2 - 4 = 0^-$ et $f(-2) = 0$

d) $\lim_{x\to -2} x^2 - 4 = 0$ et $f(-2) = 0$

e) $\lim_{x\to -2} x^2 - 4 = 0$ et $f(-2) = 0$

f) $\lim_{x\to 3} x^2 - 9 = 0$ et $f(3) = 0$

g) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = 0$ et $f(0)$ n'est pas défini

h) $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ et $f(0)$ n'est pas défini

i) $\nexists$ car limites à gauche et à droite sont $-\infty$ et $+\infty$ respectivement. $f(0)$ n'est pas défini.

j) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{2}$

k) $\lim_{x\to -1} \frac{x-1}{x^2-1} = \nexists$ et $f(-1)$ n'est pas défini.

Question 2

a) -27 ; $f(-3) = -27$

b) -1 ; $f(1) = -1$

c) 0 ; $f(-1) = 0$

d) 1 ; $f(3) = 1$

e) $\nexists$; $f(1)$ n'est pas défini

f) ∞, $f(0)$ n'est pas défini

g) ∞, $f(0)$ n'est pas défini

h) ∞, $f(0)$ n'est pas défini

i) 0 ; $f(2) = 0$

j) 4 ; $f(2)$ n'est pas défini.

Question 3

a) non défini

b) -1

c) -1

d) -1

e) 0

f) 0

g) 3

h) $\nexists$

Question 4

a) Non défini

b) $-\infty$

c) $-\infty$

d) $-\infty$

e) 1

f) 1

g) $-\infty$

h) $\nexists$

i) 0

Question 5

a) 0 ; 9.

b) $-1/3$; ∞.

c) ∞ ; $1/9$.

d) $1/9$; ∞.

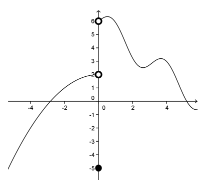
e) $\nexists$; 1.

f) $1/3$; $1/6$.

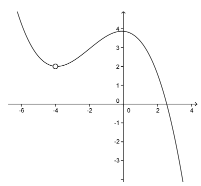
Question 6

Il y a différentes réponses possibles pour ces questions. À titre indicatif, voici une possibilité pour chaque cas.

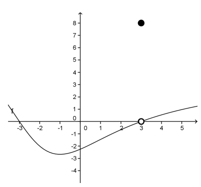
a)



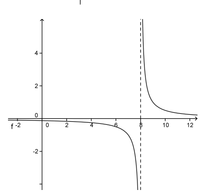
b)



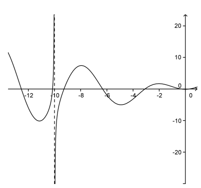
c)



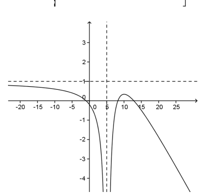
d)



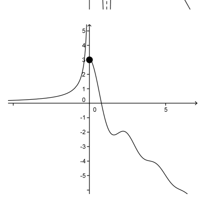
e)



f)



g)



Question 7

a) $x = -2$ (essentielle, type 2) ; $x = 4$ (non-essentielle).

b) $x = 0$ et $x = 8$ (essentielles, type 4)

c) $x = 0$ (non-essentielle, type 1)

d) $x = -3$ (essentielle, type 4) ; $x \in [5, 6]$ (essentielles, type 4)

Question 8

a) Discontinue.

b) Continue à gauche, continue à droite, continue.

c) Continue à droite, discontinue.

Question 9

a) (i), (ii), (iii), (v).

b) (ii), (iii).

c) (iii), (v).

d) (iii)

Question 10

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 2} 3x^2 + 1 \\
&= \lim_{x\to 2} 3x^2 + \lim_{x\to 2} 1 \quad (AL3) \\
&= \left(\lim_{x\to 2} x\right)\left(\lim_{x\to 2} x\right) + 1 \quad (AL1) \\
&= \left(\lim_{x\to 2} 3\right)\left(\lim_{x\to 2} x\right)\left(\lim_{x\to 2} x\right) + 1 \quad (AL4) \\
&= (3)(2)(2) + 1 \quad (AL1) \text{ et } (AL2) \\
&= 13 \quad \text{Arithmétique !}
\end{aligned}$$

Question 11

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to a} f(x) - g(x) = \\
&= \lim_{x\to a} f(x) + (-1)g(x) \\
&= \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} (-1)g(x) \\
&\qquad \text{(limite d'une somme)} \\
&= \lim_{x\to a} f(x) + \left(\lim_{x\to a}(-1)\right)\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) \\
&\qquad \text{(limite d'un produit)} \\
&= \lim_{x\to a} f(x) + (-1)\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) \\
&\qquad \text{(limite d'une constante)} \\
&= \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)
\end{aligned}$$

Ce calcul est valable si les limites à droite de la première égalité existent, car c'est une condition de l'application des propriétés des limites d'une somme et d'un produit.

Question 12

a) 2

b) 15

c) 21

d) Impossible de calculer.

e) -15

f) $-5/3$

g) 7

h) Impossible de calculer.

Question 13

a) 5

b) 7

c) 0

d) 0

e) 0

f) 4

g) 3

h) $\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$

i) -1

j) 1

k) 1

l) $\sqrt{2}$

Question 14

a) 3

b) -1

c) 3

d) $\nexists$

e) 2

f) 2

g) $\nexists$

h) 0

i) 0

j) 0

k) 4

l) 4

Question 15

a) $\nexists$

b) 0

c) 0

Question 16

a) 5^+

b) $(-2/3)^+$

c) 8^- et 8^+

d) 2^-

e) 2^- et 2^+

f) Aucun côté

Question 17

Une forme indéterminée est une forme de résultat d'évaluation de limite avec l'hypothèse de continuité invalide et qui ne nous permettant pas de se prononcer sur le résultat alors qu'une limite qui n'existe pas n'a pas de résultat.

Question 18

a) 10

b) $2\sqrt{3}$

c) $5/3$

d) $7/8$

e) $-5/3$

f) 0

g) 13

h) $2/53$

Question 19

a) $-1/9$
b) -16
c) $1/54$
d) $\sqrt{2}$
e) 3
f) 1
g) $-1/81$
h) $-1/3$

Question 20

a) $1/2$
b) $1/4$
c) $\nexists$
d) -4
e) 108
f) $\sqrt{3}$
g) $\frac{2}{3}$
h) $-\frac{29}{21}$

Question 21

a) 0
b) -1
c) 1
d) $\nexists$
e) 1
f) -1
g) $\nexists$

Question 22

a) $1+\sqrt{5}$
b) $1+\sqrt{x}$
c) $2-\sqrt{3x+1}$

Question 23

a) $1/6$
b) $1/6$
c) $-1/24$
d) $\sqrt{5}$
e) $1/6$

Question 24

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(2+\Delta x)^3-2^3}{\Delta x}=12$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2^3}{x-2}=12$$

en utilisant la factorisation $x^3-2^3=(x-2)(x^2+2x+4)$ pour lever l'indétermination.

Question 25

a) 7
b) $2at+b$
c) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
d) $\dfrac{-2x+2}{3x^3}$
e) -4

Question 26

a) On remarque que plus x est proche de 0, plus $sin(x)$ est proche de x.
b) $\dfrac{\sin(x)}{x}$ devient de plus en plus proche de 1 quand x s'approche de 0.
c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$

Question 27

a) 1
b) 3
c) $1/6$
d) $2/5$
e) $\nexists$

Question 28

a) $-3/8$
b) 0
c) 24
d) $\sqrt{10}$

Question 29

a) Aucune discontinuité
b) Discontinuité en $x=3$
c) Discontinuité en $x=1$ et $x=-2$
d) f discontinue sur l'intervalle $]-\infty,0[$
e) Discontinuité en $x=-3$

Question 30

a) $x=3$
b) Aucune discontinuité car sur chaque branche $f(x)$ est soit une fonction exponentielle (toujours continue) ou un fonction rationnelle sans division par zéro sur l'intervalle considéré.
c) $x=0$, $f(x)$ est continue pour toute autre valeur de x car combinaison de fonctions continues.

Question 31

a) $]-\infty,0[\,;\,]0,\infty[$
b) $]-\infty,-1[\,;\,]-1,1[\,;\,[1,\infty[$
c) $[3,\infty[$
d) $]0,5[\,;\,]5,\infty[$
e) $]-\infty,1[\,;\,]1,\infty[$
f) $]-\infty,-1[\,;\,]-1,\infty[$

Question 32

Laissée à l'étudiant, il y a plusieurs réponses possibles

Question 33

a) $C(m)=\begin{cases} 2 & \text{si} \quad 0<m\le 1 \\ 2m & \text{si} \quad 1<x<10 \\ m^2 & \text{si} \quad x\ge 10 \end{cases}$
b) $]0,\infty[$
c) Non, il y a une discontinuité à 10 kg.

Question 34

Ils ont tort. Comme la fonction est continue, la proximité est conservée et il n'y a pas de changements brusques.

Question 35

a) $k=-9$
b) $k=4/3$
c) $k=0$
d) Impossible.

Question 36

f est continue car polynômiale. De plus, $f(2)=2^5-2^4+2^3-2^2+2-1=32-16+8-4+2-1=21>0$ et $f(-2)=(-2)^5-(-2)^4+(-2)^3-(-2)^2+(-2)-1=-32-16-8-4-2-1=-63<0$. Par le théorème de la valeur intermédiaire, f doit avoir au moins un zéro dans l'intervalle $(-2,2)$.

Question 37

Soit $g(x)=f(x)-x$. Comme f est continue sur $[0,1]$, g l'est aussi. De plus, $g(0)=f(0)-0=f(0)>0$ et $g(1)=f(1)-1<0$ car $f(1)<1$. Par TVI, il y a un $a\in(0,1)$ tel que $g(a)=0$. On a donc un a tel que $g(a)=f(a)-a=0$, ou encore $f(a)=a$, QED.

Question 38

a) $\nexists$
b) $\nexists$
c) $-\infty$
d) $-9/2$
e) $-\frac{1}{4\sqrt{3}}$
f) -4
g) -1

Question 39

Laissé à l'étudiant.

Question 40

a) $\nexists$
b) -27
c) ∞
d) $\nexists$
e) 3
f) $\nexists$
g) -2
h) ∞
i) 1
j) $-\sqrt{2}$