Séries géométriques

Progression géométrique

$$\underset{\times r}{A \curvearrowright} Ar \underset{\times r}{\curvearrowright} Ar^2 \underset{\times r}{\curvearrowright} Ar^3 \quad \cdots \quad Ar^k \quad Ar^{k+1} \quad \cdots \quad Ar^n$$

$$A = 3 \qquad r = \frac{1}{2}$$

$$3 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{3}{2^2} \quad \frac{3}{2^3} \quad \cdots \quad 3\left(\frac{1}{2}\right)^k \quad \cdots$$

Progression géométrique — terminologie

terme initial A **raison** r **terme général** Ar^k

$$A \quad Ar \xrightarrow{\times r} Ar^2 \quad Ar^2 \quad \cdots \quad Ar^k \quad \cdots \quad Ar^n$$

Généralité du terme général

0	1	2	3	$\cdots$	k	$k+1$	$\cdots$	n
A	Ar	Ar^2	Ar^3	$\cdots$	Ar^k	Ar^{k+1}	$\cdots$	Ar^n

$$\text{terme général} = Ar^k$$

$$Ar^0 = A(1) = A$$

La raison est constante

$$A \quad Ar \quad Ar^2 \quad Ar^3 \quad \cdots \quad Ar^k \quad Ar^{k+1} \quad \cdots \quad Ar^n$$

$$\frac{Ar^{k+1}}{Ar^k} = r$$

Exemples de progressions géométriques

terme initial $A = 2$ raison $r = \frac{1}{10}$

$$2 \frac{2}{10} \frac{2}{100} \frac{2}{1000} \cdots$$

terme initial $A = 1$ raison $r = -\frac{1}{2}$

$$1 - \frac{1}{2} \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} \cdots$$

terme initial $A = -1$ raison $r = 2$

$$-1 - 2 - 4 - 8 \cdots$$

Notation pour le terme général d'une suite

terme général $a_k = Ar^k$

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_0, & a_1, & a_2, & \cdots, & a_k, & \cdots, & a_n \\
A, & Ar, & Ar^2, & \cdots, & Ar^k, & \cdots, & Ar^n
\end{array}
$$

Exemples

$$a_k = \frac{1}{k} \qquad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$$

$$a_k = 2\left(\frac{1}{10}\right)^k \qquad 2, \frac{2}{10}, \frac{2}{100}, \frac{2}{1000}, \cdots$$

Exemples

$$a_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k^2+1} \qquad -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \cdots$$

$$a_k = \frac{2k}{2k+1} \qquad 0, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \cdots$$

Terme général d'une suite donnée

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$$

Terme général d'une suite donnée

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$$

$$a_k = \frac{(-1)^k}{k}, \quad k = 1, 2, 3, \cdots$$

$$-1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16}, \cdots$$

$$-1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16}, \cdots$$

$$a_k = \frac{2k-1}{2^k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

Quelques trucs pour trouver le terme général

- Signes qui alternent . . . . $(-1)^k$ ou $(-1)^{k+1}$
- Nombres pairs . . . . $2k$
- Nombres impairs . . . . $2k+1$ ou $2k-1$
- Carrés 1,4,9,16, etc. . . . . k^2
- Cubes 1,8,27, 64, 125, etc. . . . . k^3
- Puissances de 2 : 2, 4, 8, 16, 32, etc. . . . . 2^k
- Puissances de 3 : 3, 9, 27, 81, etc. . . . . 3^k
- Factorielle 1,2,6,24, etc. . . . . $k! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots(k-1)(k)$

Terme général = fonction

$$a\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \qquad a_k = f(k)$$

$$a_k = k, \quad k \geq 0 \qquad\qquad a_k = \frac{1}{k}, \quad k \geq 1$$

$$a_k = \frac{(-1)^k}{k!}, \quad k \geq 0 \qquad\qquad a_k = \frac{2k-1}{2^k}, \quad k \geq 0$$

En général, on utilise les indices comme a_k b_j pour les fonctions sur $\mathbb{Z}$ et des variables $f(x)$, $g(y)$ pour les fonctions sur $\mathbb{R}$.

Somme géométrique

$$\sum_{k=0}^{n} Ar^k = \underbrace{A + Ar + Ar^2 + \cdots + Ar^{(n-1)} + Ar^n}_{n+1 \text{ termes}}$$

Sommes géométriques

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} A r^k = A \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}}$$

Rappel

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\begin{array}{rcccccccc}
S = & 1 & + & 2 & + & 3 & + \cdots + & n \\
S = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + \cdots + & 1 \\
\hline
2S = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + \cdots + & (n+1)
\end{array}$$

On adapte l'idée aux séries géométriques

$$S = Ar^0 + Ar^1 + Ar^2 + \cdots Ar^{(n-1)} + Ar^n$$

$\times r$

$$rS = Ar^1 + Ar^2 + Ar^3 + \cdots + Ar^n + Ar^{(n+1)}$$

$$
\begin{array}{rl}
S & = Ar^0 + Ar^1 + Ar^2 + \cdots + Ar^{(n-1)} + Ar^n \\
-rS & = Ar^1 + Ar^2 + Ar^3 + \cdots + Ar^n + Ar^{(n+1)} \\
\hline
S - rS & = Ar^0 + 0 + 0 + \cdots + 0 - Ar^{(n+1)}
\end{array}
$$

$$(1 - r)S = A\left(1 - r^{(n+1)}\right)$$

$$S = A\frac{1 - r^{(n+1)}}{1 - r} \quad (\text{si } r \neq 1)$$

Note : c’est possible d’écrire ce résultat d’une manière (légèrement) différente :

$$\sum_{k=0}^{n} Ar^k = A\frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

Série géométrique

$$\sum_{k=0}^{\infty} Ar^k = A + Ar + Ar^2 + Ar^3 + Ar^4 + \cdots = ?$$

Série géométrique

$$\sum_{k=0}^{\infty} Ar^k \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} Ar^k$$

Terme général	**Sommes partielles**	**Série**
$a_k = Ar^k$	$S_n = \sum_{k=0}^{n} Ar^k$	$\sum_{k=0}^{\infty} Ar^k = \lim_{n\to\infty} S_n$

Valeur d'une série géométrique ?

$$\sum_{k=0}^{\infty} Ar^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} Ar^k$$

$$\lim_{n\to\infty} r^{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < r < 1 \\ 1 & \text{si } r = 1 \\ \nexists & \text{si } r = -1 \\ \nexists & \text{si } r > 1 \text{ ou } r < -1 \end{cases}$$

$$= \lim_{n\to\infty} A\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

$$= A\frac{1}{1 - r}\left(1 - \lim_{n\to\infty} r^{n+1}\right)$$

$$= \begin{cases} A\frac{1}{1-r} & \text{si } -1 < r < 1 \\ \nexists & \text{si } r = 1 \\ \nexists & \text{si } r = -1 \\ \nexists & \text{si } r > 1 \text{ ou } r < -1 \end{cases}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} A r^k = \begin{cases} A\,\frac{1}{1-r} & \text{si } -1 < r < 1 \\ \nexists & \text{si } r \geq 1 \text{ ou } r \leq -1 \end{cases}}$$

$$\text{Si } r = -1, \ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \nexists$$

est une série divergente.

$$\text{Si } r = 1, \ \sum_{k=0}^{\infty} 1^k = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots = \infty$$

est une série divergente.

$$\text{Si } r = 2, \ \sum_{k=0}^{\infty} 2^k = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots = \infty$$

est une série divergente.

$$
\begin{aligned}
0.\overline{3} &= 0.33333333\cdots \\
&= \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^n \\
&= \frac{3/10}{1 - 1/10} \\
&= \frac{3/10}{9/10} = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0,\overline{9} &= 0,99999999\cdots \\
&= \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000}\cdots \\
&= \frac{9}{10} + \frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^3\cdots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^k \\
&= \frac{9}{10}\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{9}{10}\frac{1}{9/10} = 1
\end{aligned}
$$

Que vaut $0,23\overline{41} = 0,2341414141\cdots$?

$$\begin{aligned}
0,23\overline{41} &= 0,2341414141\cdots \\
&= \frac{23}{100} + \frac{41}{100^2} + \frac{41}{100^3} + \frac{41}{100^4}\cdots \\
&= \frac{23}{100} + \frac{41}{100^2} + \frac{41}{100^2}\left(\frac{1}{100}\right) + \frac{41}{100^2}\left(\frac{1}{100}\right)^2\cdots \\
&= \frac{23}{100} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{41}{100^2}\left(\frac{1}{100}\right)^k \\
&= \frac{23}{100} + \frac{41}{100^2}\frac{1}{1-\frac{1}{100}} \\
&= \frac{23}{100} + \frac{41}{100^2}\frac{1}{99/100} = \frac{23}{100} + \frac{41}{9900} = \frac{1159}{4950}
\end{aligned}$$

Tout nombre décimal périodique correspond à une fraction

STOP !