

Exercices sur la définition de dérivée – Calcul différentiel

Département de mathématiques – Cégep de Saint-Laurent
201-NYA – Hiver 2020 – Professeur : Yannick Delbecque

Exercices préparatoires

Question 1

Utiliser le triangle de Pascal pour développer les polynômes suivants.

- a) $(x+1)^3$ c) $(x+2)^5$ e) $(1-r)^6$
b) $(x-1)^3$ d) $(x+h)^4$ f) $(2x^2-3)^4$

Question 2

Mettre au dénominateur commun les fractions algébriques suivante. Simplifier le résultat.

- a) $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x}$ e) $\frac{x}{x-2} + \frac{x^2}{(x-1)}$
b) $\frac{x}{x+1} - \frac{x+1}{(x-1)}$ f) $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x+1}{(x^2+1)}$
c) $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}$ g) $\frac{1}{x^2-1} + \frac{x+1}{x-1}$
d) $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2(x-2)}$ h) $\frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+x+1}$

Question 3

Utilisez le conjugué pour éliminer les racines carrées au dénominateur ou au numérateur.

- a) $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$ d) $\frac{1}{1-\sqrt{x}}$ g) $\frac{x}{(2x+1)(\sqrt{x}-3)}$
b) $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}$ e) $\frac{1}{\sqrt{x}+3}$ h) $\frac{1}{\sqrt{2x+1}+1}$
c) $\frac{1}{\sqrt{x}-2}$ f) $\frac{x}{\sqrt{x}-3}$ i) $\frac{\sqrt{3x-1}-\sqrt{x}}{2x-1}$

Question 4

Évaluer les expressions suivantes sans simplifier.

- a) $f(2+\Delta x)$ si $f(x) = x^2$
b) $f(1+\Delta x)$ si $f(x) = \frac{1}{2}$
c) $f(1+\Delta x)$ si $f(x) = x^2 + 2x + 1$
d) $f(-1+\Delta x)$ si $f(x) = \frac{1}{1+x}$
e) $f(3+\Delta x)$ si $f(x) = \sqrt{3+x}$
f) $f(2+\Delta x)$ si $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$
g) $f(x+\Delta x)$ si $f(x) = x^3 + 1$
h) $f(x+\Delta x)$ si $f(x) = \frac{x}{x+1}$

Taux de variation moyen

Question 5

Déterminer les valeurs suivantes.

- a) Δy si $f(x) = x^2$ et x varie de 0 à 5.
b) Δy si $f(x) = x^2$ et x varie de -2 à 2 .
c) Δy si $f(x) = x^2$ et x varie de -3 à -2 .
d) Δy si $f(x) = x^3$ et x varie de -2 à 3 .
e) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ si $f(x) = \sqrt{x}$ quand x varie de 0 à 9.
f) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ si $f(x) = \frac{1}{x}$ quand x varie de 1 à 3.

Question 6

Déterminer les valeurs suivantes sans simplifier le résultat.

- a) Δy si $f(x) = x^2$ et x varie de 0 à Δx .
b) Δy si $f(x) = x^2$ et x varie de 1 à $1+\Delta x$.
c) Δy si $f(x) = x^3$ et x varie de -2 à $-2+\Delta x$.
d) Δy si $f(x) = \frac{1}{x}$ et x varie de 1 à $1+\Delta x$.
e) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ si $f(x) = \frac{1}{x}$ quand x varie de 1 à $1+\Delta x$.
f) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ si $f(x) = x^2$ quand x varie de x à $x+\Delta x$.
g) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ si $f(x) = x^3$ quand x varie de x à $x+\Delta x$.
h) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ si $f(x) = \frac{1}{x}$ quand x varie de x à $x+\Delta x$.
i) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ si $f(x) = \sqrt{x}$ quand x varie de x à $x+\Delta x$.

Question 7

Déterminer l'équation de la droite $y = ax + b$ qui passe par les points donnés. Faire une esquisse représentant la fonction et la droite.

- a) $(1, f(1))$ et $(2, f(2))$ pour $f(x) = x^2$
b) $(0, f(0))$ et $(2, f(2))$ pour $f(x) = x^3$
c) $(1, f(1))$ et $(2, f(2))$ pour $f(x) = \frac{1}{x}$
d) $(1, f(1))$ et $(2, f(2))$ pour $f(x) = \sqrt{x}$
e) $(0, f(0))$ et $(\Delta x, f(\Delta x))$ pour $f(x) = x^3$
f) $(1, f(1))$ et $(1+\Delta x, f(1+\Delta x))$ pour $f(x) = x^2$

Question 8

Montrer que l'équation de la droite qui passe par les points $(a, f(a))$ et $(a + \Delta x), f(a + \Delta x)$ du graphe d'une fonction f est

$$y = f(a) + \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - a).$$

Faire une esquisse représentant la situation.

Question 9

Soit la fonction définie par l'équation $y = x^3$. Calculer le taux de variation moyen $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sur l'intervalle demandé. Donner la valeur de Δx pour chacun des cas

- a) [2,4] b) [2,3] c) [2,2.1] d) [2,2.01] e) [2,2.001].

Question 10

Déterminer à l'aide des résultats de la question précédente vers quel nombre semble s'approcher le taux de variation de $y = x^3$ entre 2 et $2 + \Delta x$ lorsque Δ devient infiniment petit ?

Question 11

Soit la fonction $f(x) = x^3 - x$. Calculer les taux de variation moyens suivants en simplifiant les fractions algébriques obtenues. L'identité algébrique suivante pourrait être utile : $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$.

- a) $\text{TVM}_{[2,4]}f(x)$. b) $\text{TVM}_{[a,b]}f(x)$. c) $\text{TVM}_{[x,x+\Delta x]}f(x)$.

Question 12

Loi de refroidissement (ou du réchauffement) de Newton : si T est la température d'un objet, A la température ambiante et t le temps écoulé, le taux de variation $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ de la température par rapport au temps est proportionnel à la différence entre la température de l'objet et la température ambiante :

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = C(T - A)$$

où C est la constante de proportionnalité (qui dépend du système).

Après la chute de météorites survenue sur la ville de Tcheliabinsk en Russie en février 2013, des chercheurs s'approprient à récupérer des fragments de la météorite dans la zone sinistrée.

Les chercheurs sont arrivés sur le site à 14 h et ont remarqué que la température d'un fragment était de 140°C . Deux heures plus tard, la température a chuté de 50°C .

Sachant que la température ce jour là était de -10°C et que la météorite a touché le sol à 10 h, déterminer la température du fragment au moment précis où la météorite a touché le sol.

Taux de variation instantané

Question 13

Déterminer le TVI $\frac{dy}{dx}$ des fonctions suivantes au point donné (sans utiliser les formules de dérivation). Déterminer l'équation de la droite tangente au graphe de f à ce point.

- a) $y = x^2$ quand $x = 2$. g) $y = \frac{3}{x^2}$ quand $x = 2$.
 b) $y = x^2 - 1$ quand $x = 2$. h) $y = x^2$ quand $x = a$.
 c) $y = x^3$ quand $x = 2$. i) $y = x^3$ quand $x = a$.
 d) $y = 3x$ quand $x = 2$. j) $y = \frac{1}{x}$ quand $x = a$.
 e) $y = 2$ quand $x = 2$.
 f) $y = \frac{1}{x}$ quand $x = 2$.

Question 14

Déterminer laquelle des deux fonctions suivantes croît le plus rapidement en $x = 1$:

$$f(x) = x^2 \text{ ou } f(x) = -\frac{1}{x}?$$

Question 15

La fonction donnant l'aire d'un cercle (en centimètres carrés) par rapport à son rayon (en centimètres) est $A(r) = \pi r^2$

- a) Quelle est la variation de l'aire du cercle si le rayon passe de 2 cm à 4 cm ?
 b) Quelle est le taux de variation moyen de l'aire du cercle si le rayon passe de 2 cm à 4 cm ?
 c) Quelle est le taux de variation instantané de l'aire du cercle lorsque le rayon est de 4 cm ?

Différentielles et fonctions dérivées

Question 16

Déterminer la fonction dérivée $\frac{dy}{dx}$ à l'aide de la définition.

- a) si $y = x^4$ c) si $y = \frac{x^2}{x+1}$ e) si $y = x^2 + x + 1$
 b) si $y = \frac{1}{x^2}$ d) si $y = 1 - x^2$ f) si $y = \sqrt{x-1}$

Question 17

En utilisant les résultats de la question précédente et le fait que

$$dy = \frac{dy}{dx} dx,$$

déterminer l'erreur absolue sur y pour $x = 2$ et $x = 10$ si l'erreur en x est 0.1. Pour laquelle des deux valeurs de x l'erreur en y est-elle la plus grande ?

- a) si $y = x^4$ c) si $y = \frac{x^2}{x+1}$ e) si $y = x^2 + x + 1$
 b) si $y = \frac{1}{x^2}$ d) si $y = 1 - x^2$ f) si $y = \sqrt{x-1}$

Question 18

Trouver la dérivée des fonctions suivantes en utilisant la définition.

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = x^3$

c) $g(x) = \sqrt{x+3}$

d) $h(x) = \frac{x+3}{x+5}$

e) $f(x) = 2x^2 - x; f'(2)$.

f) $x(t) = at^2 + bt + c; \frac{dx}{dt}$.

g) $y = \sqrt{x^2+1}; \frac{dy}{dx} \Big|_{x=-1}$.

h) $g(x) = \frac{2}{3x} - \frac{1}{3x^2}; g'(x)$.

Question 19

Dans les questions précédentes, on a déterminé que la dérivée de $y = x^3$ est $y' = 3x^2$. Utilisez la relation entre dy et dx

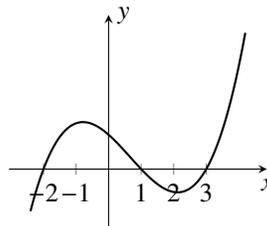
$$dy = f(x+dx) - f(x)$$

pour approximer $(1.1)^3$. (Ind. décomposer 1.1 en $x+dx$ avec $x = 1$ et $dx = 0.1$ pour déterminer $f(x+dx) = f(x) + dy$.)

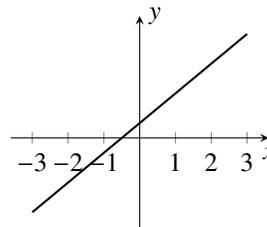
Question 20

Associer chacune des fonctions suivantes (à gauche) à sa dérivée (à droite).

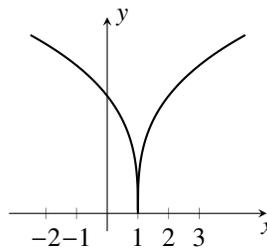
a)



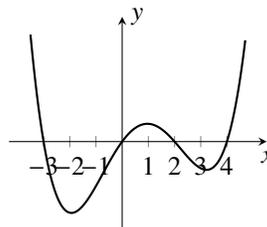
b)



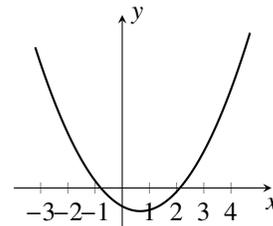
c)



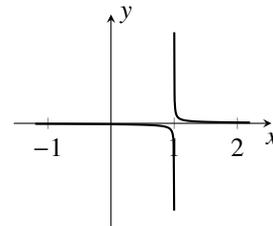
d)



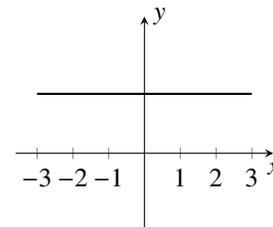
i)



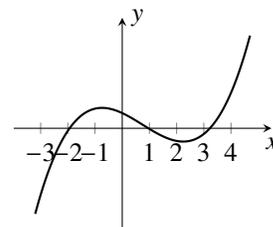
ii)



iii)



iv)



Solutions

Question 1

- a) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
- b) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
- c) $x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$
- d) $x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4$
- e) $r^6 - 6r^5 + 15r^4 - 20r^3 + 15r^2 - 6r + 1$
- f) $16x^8 - 96x^6 + 216x^4 - 216x^2 + 81$

Question 2

- a) $\frac{2(x-1)}{x(x-2)}$
- b) $-\frac{3x+1}{(x-1)(x+1)}$
- c) $\frac{(x-1)}{(x-2)^2}$
- d) $\frac{(x^2+1)}{x^2(x-2)}$
- e) $\frac{x(x^2-x-1)}{(x-1)(x-2)}$
- f) $\frac{x(x+1)^2}{(x^2+1)(x-1)}$
- g) $\frac{x^2+2x+2}{x^2-1}$
- h) $\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$

Question 3

- a) $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{2}}{x-2}$
- b) $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{2}}{2-x}$
- c) $\frac{\sqrt{x}+2}{x-4}$
- d) $\frac{1+\sqrt{x}}{1-x}$
- e) $\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$
- f) $\frac{x(\sqrt{x}+3)}{x-9}$
- g) $\frac{x(\sqrt{x}+3)}{(2x+1)(x-9)}$
- h) $\frac{\sqrt{2x+1}-1}{2x}$
- i) $\frac{1}{\sqrt{3x-1} + \sqrt{x}}$

Question 4

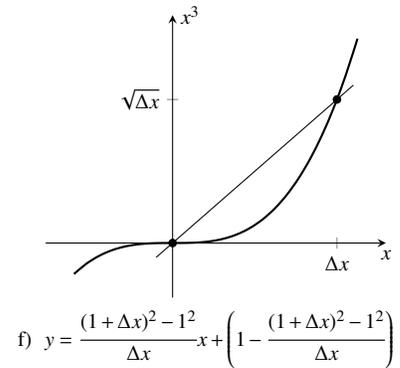
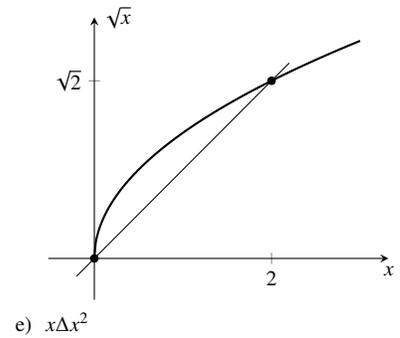
- a) $(2+\Delta x)^2$
- b) $\frac{1}{2}$
- c) $(1+\Delta x)^2 + 2(1+\Delta x) + 1$
- d) $\frac{1}{1+(-1+\Delta x)}$
- e) $\frac{\sqrt{3+(3+\Delta x)}}{(2+\Delta x)+2}$
- f) $\frac{(2+\Delta x)+2}{(2+\Delta x)+1}$
- g) $(x+\Delta x)^3 + 1$
- h) $\frac{(x+\Delta x)}{(x+\Delta x)+1}$

Question 5

- a) $\Delta y = 25$
- b) $\Delta y = 0$
- c) $\Delta y = -5$
- d) $\Delta y = 35$
- e) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{9} - \sqrt{0}}{9-0} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$
- f) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1/3 - 1/1}{2} = -\frac{2}{3}$

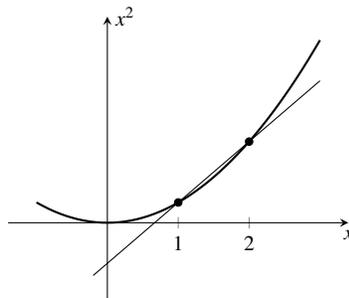
Question 6

- a) $\Delta y = \Delta x^2$
- b) $\Delta y = (1+\Delta x)^2 - 1$
- c) $\Delta y = (-2+\Delta x)^3 - 8$
- d) $\Delta y = \frac{1}{1+\Delta x} - 1$
- e) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{1+\Delta x} - 1}{\Delta x}$
- f) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$
- g) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$
- h) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{x+\Delta x}{x} - \frac{1}{x}}$
- i) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$

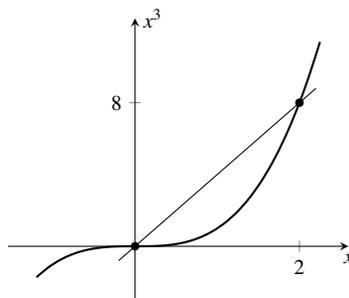


Question 7

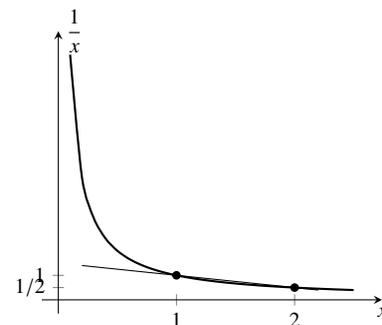
- a) $y = 3x - 2$



- b) $y = 4x$



- c) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$



- d) $(\sqrt{2}-1)x - (\sqrt{2}+2)$

Question 8

On peut faire la démonstration de différentes manières. Montrons que que la droite définie par l'équation donnée passe par les deux points donnés. En $(a, f(a))$, on a que

$$y = f(a) + \frac{\Delta y}{\Delta x}(x-a)$$

$$f(a) = f(a) + \frac{\Delta y}{\Delta x}(a-a)$$

$$f(a) = f(a).$$

L'équation de la droite est donc satisfaite en ce point.

Au point $(a + \Delta x, f(a + \Delta x))$, on a que

$$y = f(a) + \frac{\Delta y}{\Delta x}(x-a)$$

$$f(a + \Delta x) = f(a) + \frac{\Delta y}{\Delta x}((a + \Delta x) - a)$$

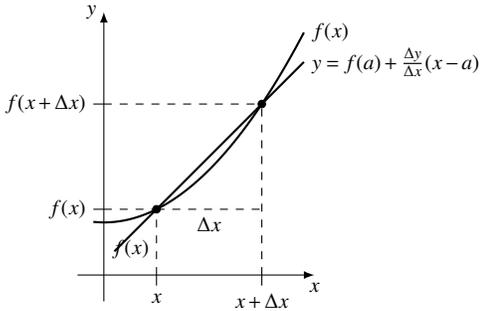
$$f(a + \Delta x) = f(a) + \frac{\Delta y}{\Delta x} \Delta x$$

$$f(a + \Delta x) = f(a) + \Delta y$$

$$f(a + \Delta x) = f(a) + (f(a + \Delta x) - f(a))$$

$$f(a + \Delta x) = f(a + \Delta x)$$

L'équation de la droite est donc aussi satisfaite pour l'autre point. Ainsi, comme la droite passe par les deux points donnés, c'est bien l'équation de la droite cherchée.



Question 9

- a) $\frac{4^3-2^3}{4-2} = 28, \Delta x = 2$
- b) 19, $\Delta x = 1$
- c) 12.61, $\Delta x = 0.1$
- d) 12.0601, $\Delta x = 0.01$
- e) 12.006001, $\Delta x = 0.001$

Question 10

12

Question 11

- a) 27
- b) $\frac{b^3 - b - (a^3 - a)}{b - a} = b^2 + ab + a^2 - 1$
- c) $\frac{(x + \Delta x)^3 - (x + \Delta x) - (x^3 - x)}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2 - 1$

Question 12

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = C(T - A)$$

$$\frac{90}{2} = C(140 - (-10))$$

$$45 = C(150)$$

$$C = \frac{45}{150} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{3}{10}(T + 10)$$

$$\Delta T = \frac{3}{10}(T + 10)\Delta t$$

$$\Delta T = \frac{3}{10}(140 + 10)(10 - 14)$$

$$\Delta T = \frac{3}{10}(150)(-4) = -180$$

$$\Delta T = T_{\text{fin}} - T_{\text{ini}}$$

$$T_{\text{ini}} = T_{\text{fin}} - \Delta T = 140 - (-180) = 320.$$

Question 13

- a) 4, $y = 4x - 4$
- b) 4, $y = 4x - 5$
- c) 12, $y = 12x - 16$
- d) 3, $y = 3x$
- e) 0, $y = 2$
- f) $-\frac{1}{4}, y = -\frac{x}{4} + 1$
- g) $-\frac{3}{4}, y = -\frac{3x}{8}x + \frac{9}{4}$
- h) $2a, y = 2ax - a^2$
- i) $3a^2, y = 3a^3x - 2a^3$
- j) $-\frac{1}{a^2}, y = -\frac{x}{a^2} + \frac{2}{a}$

Question 14

$\text{TVI}_f(1) = 2, \text{TVI}_g(1) = 1$, la fonction f croit donc plus rapidement que g en $x = 1$.

Question 15

- a) $12\pi \text{ cm}^2$
- b) $6\pi \text{ cm}$
- c) $8\pi \text{ cm}$

Question 16

- a) $\frac{dy}{dx} = 4x^3$
- b) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^3}$
- c) $\frac{dy}{dx} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$
- d) $\frac{dy}{dx} = -2x$
- e) $\frac{dy}{dx} = 2x + 1$
- f) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

Question 17

- a) $|dy| = 3.2; |dy| = 400$
- b) $|dy| = 0.025; |dy| = 0.0002$
- c) $|dy| \approx 0.089; |dy| \approx 0.0991$
- d) $|dy| = 0.4; |dy| = 2$
- e) $|dy| = 0.5; |dy| = 2.1$
- f) $|dy| = 0.05; |dy| \approx 0.1667$

Question 18

- a) $f'(x) = 2x$
- b) $f'(x) = 3x^2$
- c) $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$
- d) $h'(x) = \frac{2}{(x+5)^2}$
- e) 7
- f) $2at + b$
- g) -2
- h) $g'(x) = \frac{-2}{3x^2} + \frac{2}{3x^3}$

Question 19

On a que $dy = 3x^2 dx$. Donc si $x = 1$ et $dx = 0, 1$, on a que

$$dy = 3(1)^2(0, 1) = 0, 3.$$

Comme $dy = f(x + dx) - f(x)$, on a que $f(x + dx) = f(x) + dy$. On utilise cette dernière égalité pour approximer $f(x + dx)$.

$$f(1, 1) = f(1 + 0, 1)$$

$$\approx f(1) + 0, 3$$

$$= 1^3 + 0, 03$$

$$= 1, 03.$$

Question 20

- a) i)
- b) iii)
- c) ii)
- d) iv)