Exercices de révision

Calcul différentiel – Hiver 2020 – Yannick Delbecque

Notation, logique, nombres

Question 1
Démontrer les énoncés suivants, ou donner un contre exemple pour montrer qu'ils sont faux.

a) « La somme de deux multiples de 3 est aussi un multiple de 3 ».
b) « Le cube d'un nombre pair est pair. »
c) « La somme d'un nombre entier et d'un nombre rationnel est un nombre entier. »
d) « La somme de deux nombres rationnels est un nombre rationnel »

Question 2
Mettre les nombres périodiques $0.\overline{123}$ et $2.\overline{18}$ sous forme de fractions.

Question 3 (Défi difficile)
Démontrer que $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre rationnel en utilisant le lemme suivant (qu'il n'est pas nécessaire de prouver) :

n est un multiple de 3 ssi n^2 est un multiple de trois.

Indice : s'inspirer de la preuve vue en classe pour $\sqrt{2}$.

Question 4 (Défi difficile)
Démontrer que $\log_2(3)$ n'est pas un nombre rationnel en utilisant le fait que la décomposition en facteurs premiers est unique. Indice : s'inspirer (un peu moins) de la preuve vue en classe pour $\sqrt{2}$.

Question 5
Effectuer les opérations suivantes.

a) $\{1,\pi,2\pi\}\cup\{1,2,3,4\}$
b) $\{1,\pi,2\pi,3\}\cap\{1,2,3,4\}$
c) $\{1,\pi,4,5\}\setminus\{1,2,3,4\}$
d) $[2,5]\cup]4,8]$
e) $[2,5]\cap]4,8]$
f) $[2,5]\setminus]4,8]$
g) $\mathbb{N}\cap[0.5,\pi]$
h) $\mathbb{Q}\cap\{0.5,\pi,3.14159,e,\sqrt{2},3/5\}$
i) $\{0.5,\pi,3.14159,e,\sqrt{2},3/5\}\setminus Q$

Question 6
Décrire les ensembles suivants à l'aide d'intervalles

a) $\{x \mid x\geq -3 \text{ et } x<\pi\}$
b) $\{x \mid x-2<5\}$
c) $\{x \mid x<3 \text{ et } 0<x \text{ et } x\leq 1/2\}$
d) $\{x \mid x^2<4\}$

Question 7
Compléter avec « = » ou « $\iff$ ».

a) $2+3 \boxed{} 5$
b) $x^2+1 \boxed{} (x-1)(x+1)$
c) $x+2=3 \boxed{} x=1$
d) $(x+1)^2=1 \boxed{} x^2+2x+1=1$
e) $(x+1)^3 \boxed{} x^3+3x^2+3x+1$
f) $x^2=4 \boxed{} x=2$ ou $x=-2$
g) $AB=0 \boxed{} A=0$ ou $B=0$

Exposants

Question 8
Simplifier et réécrire les expressions suivantes pour que le résultat n'ai aucun exposant fractionnaire ou négatif.

a) 2^{-3}
b) $2^{1/2}$
c) $3^{-1/3}$
d) $5^{-2/3}$
e) $\left(2^{1/2}\right)^3$
f) $\left(\frac{1}{100}\right)^{1/2}$
g) $2^{1/2}2^{-5/2}$
h) $\dfrac{2^{3/2}}{2^{5/2}}$
i) $\dfrac{2^{1/2}}{2^{1/3}}$
j) $\left(\frac{1}{5^{2/3}}\right)^{1/2}$
k) $\left(2^{1/2}+3^{1/2}\right)^{-2}$
l) $\sqrt{3^2+4^2}$
m) $\left(\left(\sqrt{2}\right)^8\right)^{1/2}$

Question 9
Mettre les expressions suivantes sous la forme

$$C(x-a)^b$$

où a et b et C sont des nombres réels.

a) $\dfrac{1}{x^3}$
b) $\dfrac{2}{x^3}$
c) $\dfrac{2}{3x^5}$
d) $\dfrac{1}{(x-3)^2}$
e) $\dfrac{7}{(x+1)^6}$
f) $\sqrt{x}$
g) $\sqrt[3]{x-2}$
h) $\dfrac{\sqrt[4]{x+2}}{5}$
i) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
j) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$
k) $\dfrac{2}{3\sqrt[5]{x}}$
l) $\sqrt{x^3}$
m) $\sqrt[4]{(x-3)^5}$
n) $\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$
o) $\dfrac{4}{3\sqrt[5]{x^4}}$
p) $(2x-3)^2$
q) $(2x)^3$
r) $(2x-1)^3$
s) $\sqrt{4x-1}$
t) $\dfrac{(x-2)^2}{\sqrt{x-2}}$
u) $\dfrac{3(x+1)}{4\sqrt[3]{x+1}}$
v) $\dfrac{2\sqrt[3]{x+1}}{5\sqrt{x+1}}$

Droites

Question 10
Déterminer la pente et l'ordonnée à l'origine des droites suivantes.

a) La droite d'équation $3x+2y=1$.

b) La droite d'équation $\frac{x}{5}+\frac{2y}{3}=1$.

c) La droite d'équation $y=-3(x-2)+1$

d) La droite d'équation $\sqrt{2}x+\log_2(3)y=\sqrt{3}$

Question 11
Donner l'équation de la droite...

a) de pente -5 qui passe par le point $(-3,4)$;

b) passant par les points $(-2,4)$ et $(1,-5)$;

c) parallèle à la droite trouvée en a) qui passe par le point $(1,-2)$.

Paraboles

Question 12
Trouver les zéros de chacune des fonctions polynomiales ci-dessous en factorisant.

a) $f(x)=x^2+7x+12$

b) $f(x)=9-4x^2$

c) $f(x)=3x^2+5x$

d) $f(x)=-x^2-100$

Question 13
Utiliser la formule quadratique pour trouver les zéros de chacune des fonctions suivantes.

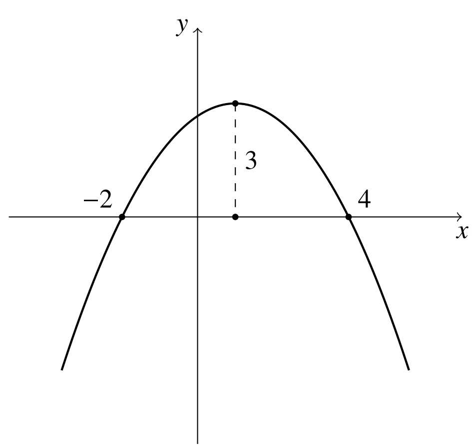
a) $f(x)=-3x^2+2x-6$

b) $f(x)=6x^2-17x+12$

c) $f(x)=x^2+11$

d) $f(x)=9x^2-6x+1$

Question 14
Déterminer quelle fonction quadratique de la forme $f(x)=ax^2+bx+c$ est illustrée dans le graphe suivant.



Question 15
Faire une esquisse des paraboles définie par les équations suivantes.

a) $y=x^2-2$

b) $y=4-x^2$

c) $y=(x-1)(x+2)$

d) $y=-(x-2)(x+1)$

e) $y=x(x-3)$

f) $y=(x-1)^2$

g) $y=(x+1)^2-1$

h) $y=-(x-1)(x-3)$

i) $y=1-(x+1)^2$

Polynômes

Question 16
Factoriser complètement les polynômes suivants.

a) $4x^3-3x^2+4x-3$

b) x^2+5x+6

c) $9x^2+12x+4$

d) $16x^2-81$

e) x^2+25

f) $3x^3-108x$

g) $18x^5+32x^3$

h) x^4-5x^2+4

Question 17
Trouver les zéros des fonctions polynomiales et rationnelles suivantes.

a) $f(x)=4x-3$

b) $f(x)=2$

c) $f(x)=2x^2-5x+2$

d) $f(x)=(x-1)(x+1)$

e) $f(x)=x(x-1)\left(x+\sqrt{2}\right)$

f) $f(x)=\dfrac{(x-2)(x+1)}{x^2+3}$

Question 18
Effectuer les divisions polynomiales suivantes.

a) $\dfrac{x^2-1}{x-1}$

b) $\dfrac{x^2-1}{x+1}$

c) $\dfrac{x^2+1}{x-1}$

d) $\dfrac{x^3-1}{x-1}$

e) $\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

f) $\dfrac{x^4-x^3-2x^2+3x-1}{x-1}$

g) $\dfrac{x^5+x^4+2x^3+2x^2+x+2}{x+1}$

Question 19
Factoriser les polynômes suivant à l'aide du théorème de factorisation en utilisant le zéro donné.

a) $P(x)=x^3+x^2-2x-8$, $P(2)=0$.

b) $P(x)=x^3+4x^2+6x+4$, $P(-2)=0$.

c) $P(x)=x^3-4x^2-x+6$, $P(2)=0$.

d) $P(x)=x^4+x^3-8x+8$, $P(-1)=0$.

Question 20
Vrai ou faux ?

a) Tous les facteurs d'un polynôme sont de la forme $(x-a)$.
b) $(x-2)(x^2+x-6)$ un produit de polynômes premiers.

Question 21
Le polynôme $P(x) = x^3 - 4x^2 + 8x - 15$ peut également s'écrire de la manière suivante.

$$P(x) = (x-3)\left(x^2 - x + 5\right)$$

a) Peut-on le factoriser davantage ? Expliquer.
b) Vérifier que $x = 3$ est un zéro de $P(x)$ dans les deux formes données dans la question.
c) Trouver, s'il y en a, d'autres valeurs de x pour lesquelles $P(x) = 0$.

Question 22
Soit le polynôme $P(x) = x^4 - 5x^3 - 8x^2 - 24$.

a) Sans effectuer de division, dire si $(x-2)$ est un facteur de $P(x)$.
b) Est-ce que $(x+2)$ divise $P(x)$?

Question 23
Soit le polynôme $P(x) = x^4 + 3x^2 + 2$.

a) Ce polynôme a-t-il des zéros ?
b) Existe-t-il une factorisation pour de $P(x)$?
c) Cela contredit-il le théorème de factorisation ? Expliquer.

Question 24
Soit $P(x)$ un polynôme de degré 5. En supposant que tous les zéros sont différents, déterminer le nombre de zéro que ce polynôme pourrait avoir.

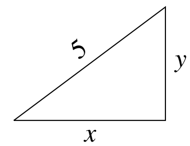
Question 25
Factoriser et simplifier.

a) $\dfrac{(x+1)^4}{x^2+2x+1}$
b) $\dfrac{x^2-4}{x-2}$
c) $\dfrac{x^2+x-6}{x^2+4x+3}$
d) $(x-2)^3(2x+1)^2 + (x-2)^2(2x+1)^3$
e) $(x-1)^9(x+2)^5 + (x-1)^8(x^2+2)^6$
f) $\dfrac{(x-2)^3(x-1)^4 - (x-2)^4(x-1)^3)}{x^2-x-2}$

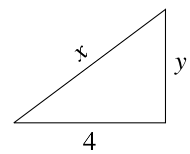
Fonctions

Fonctions et relations

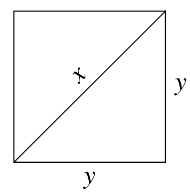
Question 26
Exprimer algébriquement la variable dépendante en fonction de la variable indépendante en utilisant les relations géométrique déterminée par les figures suivantes. Note : considérez tout les angles en radians et que les longueurs sont positives. Toutes les dimensions autres que indépendante et dépendante sont considérées comme des constantes.

a)


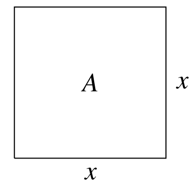
Variable dépendante y, variable indépendante x.

b)


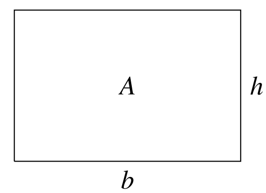
Variable dépendante y, variable indépendante x.

c)


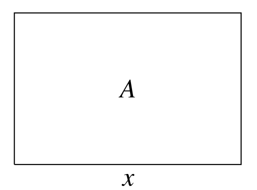
Variable dépendante y, variable indépendante x.

d)


Variable dépendante x (côté), variable indépendante A (aire).

e)


Variable dépendante b (côté), variable indépendante A (aire).

f)


Périmètre fixe = 10.
Variable dépendante A (aire), variable indépendante b (côté)

Question 27
Substituer (sans simplifier)...

a) y à x dans x^2+3x+4
b) $y+1$ à x dans x^2+3x+4
c) $y+h$ à x dans x^2+3x+4
d) x^2 à x dans x^2+3x+4
e) $x+\Delta x$ à x dans x^2+3x+4
f) $x+\Delta x$ à x dans $\dfrac{1}{x^2+1}$
g) $x+\Delta x$ à x dans $\dfrac{1}{(x+1)^2}$

Question 28
Déterminer lesquelles des équations suivantes définissent des fonctions si on considère x comme variable indépendante et y comme variable dépendante. Si l'équation donnée défini une fonction, donner la règle de correspondance et son domaine de définition.

a) $yx = 1$
b) $x + y = 1$
c) $x^2 + y^2 = 1$
d) $x + y^2 = 1$
e) $x^2 + y = 1$
f) $x^3 + y^3 = 0$
g) $2x^2 - y + 8 = 3x$
h) $\frac{1}{y} = \frac{1}{x^2}$

Évaluation de fonction

Question 29
Évaluer...

a) $f(3)$ si $f(x) = x^3$
b) $f(1)$ si $f(x) = x^{3/2}$
c) $f(9)$ si $f(x) = x^{3/2}$
d) $f\left(\sqrt[3]{2}\right)$ si $f(x) = x^{3/2}$
e) $f(2)$ si $f(x) = 2^{2/3}x^{1/3}$
f) $f(1+h)$ si $f(x) = x^2$
g) $f(3+\Delta x)$ si $f(x) = x^3$
h) $f(y)$ si $f(x) = \sqrt{x^2+1}$
i) $f(y+\Delta x)$ si $f(x) = \frac{1}{x}$
j) $f(1)$ si $f(x) = x^{5/2}$
k) $f(x+\Delta x)$ si $f(x) = x^{5/2}$
l) $f(2)$ si $f(x) = \log(x-1)$
m) $f(0)$ si $f(x) = 2^{(x-1)}$
n) $f(-1)$ si $f(x) = \frac{1}{x+1}$
o) $f(1)$ si $f(x) = 2^{(x-1)}$
p) $f(x+\Delta x)$ si $f(x) = x - 1$
q) $f(x+\Delta x)$ si $f(x) = \frac{1}{x^2} - 1$
r) $f(x+\Delta x)$ si $f(x) = (x+1)^2 - x$

Question 30
Quelle est la pente de la droite passant par les points correspondants aux valeurs $x = 2$ et $x = 3$ du graphe de la fonction $f(x) = x^3$?

Question 31
Quelle est la pente de la droite passant par les points correspondants aux valeurs $x = 2$ et $x = 2 + \Delta x$ du graphe de la fonction $f(x) = x^2$?

Composition

Question 32
Considérons les fonctions définie par $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2$ et $h(x) = \frac{1}{x+1}$. Évaluer les expressions suivantes.

a) $3f(x) - 5$
b) $f(3x-5)$
c) $f(x) + h(x)$
d) $f(x)g(x)$
e) $f(g(x))$
f) $g(f(x))$
g) $[f \circ g \circ h](x)$
h) $[h \circ g \circ f](x)$
i) $[g \circ h \circ f](x)$

Graphes

Question 33
Soit la fonction définie par $f(x) = x^3 - 4x$.

a) Donner l'équation de la droite passant par $(-1, f(-1))$ et $(2, f(2))$
b) Vérifier que le point $(1, -3)$ est sur le graphe de f
c) Donner l'équation de la droite passant par $(1, -3)$ et $(2, f(2))$

Question 34
Déterminer les points de croisement avec les axes des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \sqrt{x^2-4}$
b) $f(x) = \left(x - 3\sqrt{3}\right)^{2/3}$
c) $f(x) = \sqrt{-x^2+3x+4}$
d) $f(x) = x^4 - 16$
e) $f(x) = x^3 + 27$
f) $f(x) = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$

Question 35
Faire une esquisse du graphe des fonctions suivantes.

a) $f(x) = (x-2)^2 + 1$
b) $f(x) = \frac{1}{x}$
c) $f(x) = -\frac{1}{x-1}$
d) $f(x) = \frac{1}{x+2} - 1$
e) $f(x) = -\left(x + \sqrt{3}\right)^2 + 2\sqrt{2}$
f) $f(x) = \sqrt{x}$
g) $f(x) = \sqrt{x-1}$
h) $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$

Fonctions inverses

Question 36
Déterminer si les fonctions f et g suivantes sont des fonctions inverses une de l'autre.

a) $f(x) = 2x - 3$ et $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$
b) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ et $g(x) = x^3 - 1$
c) $f(x) = \frac{2x+1}{3x-2}$ et $g(x) = \frac{2x+1}{3x-2}$

Domaine

Question 37 (4×3 points)
Vrai ou faux ?

a) $\frac{x^2+x+1}{(x-2)(x+3)}$ est défini si et seulement si $x \leq -3$ ou $2 \leq x$.
b) $\sqrt{x-2}$ est défini si et seulement si $0 \leq \sqrt{x-2}$.

Question 38
Déterminer l'ensemble des valeurs de x qui satisfont les inégalités suivantes.

a) $x + 3 \leq 5$
b) $1 \leq 2x + 3$
c) $x + 2 < 0$
d) $x + 3 \leq 5$
e) $\frac{2-3x}{5} \leq 4$
f) $x + 2 \geq 0$ et $2x - 3 \geq 0$
g) $x + 2 \geq 0$ ou $2x - 3 \geq 0$
h) $0 \leq x^2 - 4$
i) $0 \leq 4 - x^2$
j) $0 \leq (x-1)(x+2)$
k) $0 \leq (x-1)^2 - 1$

Question 39

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes.

a) $f(x) = x^{100} + x^{50} + 1$
b) $f(x) = \dfrac{1}{2x-3}$
c) $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)(x+2)}$
d) $f(x) = \dfrac{3x-1}{2x+5}$
e) $f(x) = \dfrac{2}{x^2-16}$
f) $f(x) = \dfrac{3}{(x-4)^2}$
g) $f(x) = \dfrac{2x^2-3x-5}{x^2-x-2}$
h) $f(x) = \sqrt{x-1}$
i) $f(x) = \sqrt{2x-5}$
j) $f(x) = \sqrt{x^3}$
k) $f(x) = \sqrt{(x-1)^3}$
l) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$
m) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$
n) $f(x) = \sqrt{(x^2+1)}$
o) $f(x) = \sqrt{x^2-2x-3}$
p) $f(x) = \sqrt{x^2+2x+3}$
q) $f(x) = \dfrac{-x+2}{x^3-x^2+5x}$
r) $f(x) = |x^3-1|$
s) $f(x) = \dfrac{1}{|x-1|}$
t) $f(x) = \dfrac{1}{|x|-1}$
u) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x-5}}$

Solutions

Question 1

a) Soient $a = 3k$ et $b = 3l$ ($k, l \in \mathbb{Z}$) deux multiples de 3 quelconques. Leur somme est
$$a+b = 3k+3l = 3(k+l).$$
Comme $k+l$ est un nombre entier, $3(k+l)$ est un multiple de 3.

b) Soit $a = 2k$ (avec k un nombre entier) un nombre pair quelconque. Son cube est
$$a^3 = (2k)^3 = 2^3k^3 = 2(2^2k^3),$$
ce qui est aussi un multiple de 2 car $2^2k^3 \in \mathbb{Z}$.

c) Faux. Contre-exemple : la somme de 1 et 1/2 est 3/2, qui n'est pas un nombre entier.

d) Soit deux nombre rationnels quelconques $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ (donc avec a, b, c et d de nombres entiers et $b, d \neq 0$). Leur somme est
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}.$$
Comme $ad+bc$ et bd sont des sommes et produits de nombres entiers, ces deux nombres sont aussi entiers. De plus, $bd \neq 0$ car b et d sont non-nuls. On peut dont conclure que $\frac{ad+bc}{db}$ est un nombre rationnel.

Question 2

Soit
$$x = 0.\overline{123}.$$
On multiplie par 1000 pour obtenir
$$1000x = 123.\overline{123}.$$
En soustrayant $1000x - x$, on obtient
$$999x = 123$$
et donc
$$x = \frac{123}{999} = \frac{41}{333}.$$
Soit
$$y = 2.\overline{18}.$$
On multiplie par 100 pour obtenir
$$100y = 218.\overline{18}.$$
En soustrayant $100y - y$, on obtient
$$99x = 216$$
et donc
$$x = \frac{216}{99} = 2411.$$

Question 3

Si $\sqrt{3}$ est un nombre rationnel, il peut s'écrire sous la forme d'une fraction simplifiée :
$$\sqrt{3} = \frac{m}{n}.$$
En multipliant par n et en prenant le carré, on obtient
$$3n^2 = m^2.$$
m^2 est donc un multiple de trois, et donc m aussi (par le lemme donné). Si $m = 3k$, on a en substituant $3k$ à n dans la dernière équation, on obtient l'égalité
$$3n^2 = 9k^2.$$
En divisant par 3, on obtient
$$n^2 = 3k^2.$$
Cette fois-ci, n^2 est un multiple de 3, et donc n est aussi un multiple de 3.

Question 4

Si $\log_2(3)$ est une faction, on peut l'écrire comme un fraction déjà simplifiée
$$\log_2(3) = \frac{m}{n}.$$
Par définition des logarithmes, cela est équivalant à dire que
$$3 = 2^{m/n}.$$
En prenant la puissance n de chaque membre de l'égalité et en simplifiant les exposants avec les propriétés des exposants, on obtient
$$3^n = 2^m.$$
Comme 2 et 3 sont des nombres premiers et que la décomposition en facteurs premiers est unique, il est impossible qu'une puissance de 2 soit aussi une puissance de 3 (sans quoi on aurait deux décompositions différentes en facteurs premiers pour un même nombre !). L'hypothèse que $\log_2(3)$ est rationnel est donc fausse et
$$\log_2(3) \notin \mathbb{Q}.$$

Question 5

a) $\{1, 2, 3, 4, \pi, 2\pi\}$
b) $\{1, 3\}$
c) $\{\pi, 5\}$
d) $[2, 8]$
e) $]4, 5]$
f) $[2, 4]$
g) $\{1, 2, 3\}$
h) $\{0.5, 3.14159, 3/5\}$
i) $\{\pi, \mathrm{e}, \sqrt{2}\}$

Question 6

a) $[-3, \pi[$
b) $]-\infty, 7[$
c) $]0, 1/2[$
d) $]-2, 2[$

Question 7

a) $2+3 = 5$
b) $x^2+1 = (x-1)(x+1)$
c) $x+2 = 3 \iff x = 1$
d) $(x+1)^2 = 1 \iff x^2+2x+1 = 1$
e) $(x+1)^3 = x^3+3x^2+3x+1$
f) $x^2 = 4 \iff x = 2$ ou $x = -2$
g) $AB = 0 \iff A = 0$ ou $B = 0$

Question 8

a) $\frac{1}{2^3}$
b) $\sqrt{2}$
c) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$
d) $\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$
e) $\sqrt{2^3}$
f) $\dfrac{1}{10}$
g) $\frac{1}{2^2}$
h) $2^{-1} = \frac{1}{2}$
i) $\sqrt[6]{2}$
j) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$
k) $\dfrac{1}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2}$
l) $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ et non $\sqrt{3^2} + \sqrt{4^2} = 3+4 = 7$.
m) 2

Question 9

a) x^{-3}
b) $2x^{-3}$
c) $\dfrac{2}{3}x^{-5}$
d) $(x-3)^{-2}$
e) $7(x+1)^{-6}$
f) $x^{1/2}$
g) $(x-2)^{1/3}$
h) $\dfrac{1}{5}(x+2)^{1/4}$
i) $x^{-1/2}$
j) $2x^{-1/3}$
k) $\dfrac{2}{3}x^{-1/5}$
l) $x^{3/2}$
m) $(x-3)^{5/4}$
n) $x^{-3/2}$
o) $\dfrac{4}{3}x^{-4/5}$
p) $4(x-3/2)^2$
q) $8x^3$
r) $8(x-1/2)^3$
s) $2(x-1/4)^{-1/2}$
t) $(x-2)^{3/2}$
u) $\dfrac{3}{4}(x+1)^{2/3}$
v) $\dfrac{2}{5}(x+1)^{-3/10}$

Question 10

a) Équation de la droite : $y = -3x/2+1/2$. Pente$=-3/2$, ordonnée à l'origine $= 1/2$

b) Équation de la droite : $y = -\dfrac{3}{10}x+\dfrac{3}{2}$. Pente$=-3/10$, ordonnée à l'origine $= 3/2$

c) Équation de la droite : $y = -3x+7$. Pente$=-3$, ordonnée à l'origine $= 7$

d) Équation de la droite : $y = -\dfrac{\sqrt{2}}{\log_2(3)}x+\dfrac{\sqrt{3}}{\log_2(3)}$. Pente$=-\dfrac{\sqrt{2}}{\log_2(3)}$, ordonnée à l'origine $= \dfrac{\sqrt{3}}{\log_2(3)}$

Question 11

a) $y = -5x-11$

b) $y = -3x-2$

c) $y = -5x+3$

Question 12

a) $x = -3$ et $x = -4$

b) $x = -\frac{3}{2}$ et $x = \frac{3}{2}$

c) $x = -\frac{5}{3}$ et $x = 0$

d) La fonction n'a pas de zéro

Question 13

a) La fonction n'a pas de zéro

b) $x = \frac{4}{3}$ et $x = \frac{3}{2}$

c) La fonction n'a pas de zéro

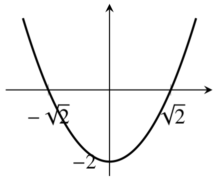
d) $x = \frac{1}{3}$ (zéro double)

Question 14

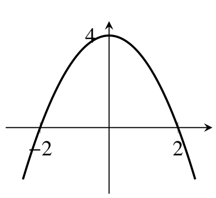
$$f(x) = -\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}$$

Question 15

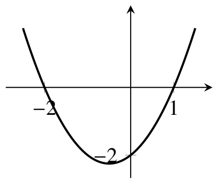
a)



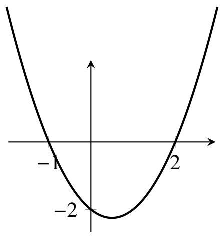
b)



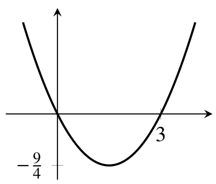
c)



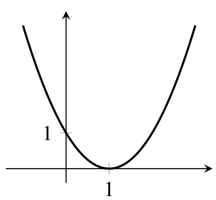
d)



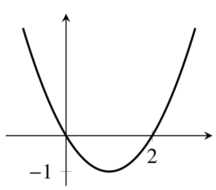
e)



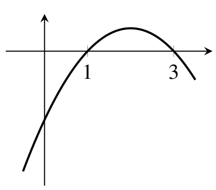
f)



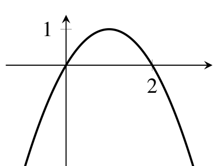
g)



h)



i)



Question 16

a) $(4x-3)(x^2+1)$

b) $(x+2)(x+3)$

c) $(3x+2)^2$

d) $(4x-9)(4x+9)$

e) x^2+25

f) $3x(x-6)(x+6)$

g) $2x^3(9x^2+16)$

h) $(x+2)(x-2)(x+1)(x-1)$

Question 17

a) x=3/4

b) aucun zéro

c) $x = 2$ et $x = 1/2$

d) $x = 1$ et $x = -1$

e) $x = 0, x = 1$ et $x = -\sqrt{2}$

f) $x = 2$ et $x = -1$

Question 18

a) $x+1$

b) $x-1$

c) $x+1$ reste 2

d) x^2+x+1

e) x reste $x-1$

f) x^3-2x+1

g) x^4+2x^2+1 reste 1

Question 19

a) $P(x) = (x-2)(x^2+3x+4)$. Note : x^2+3x+4 est premier car $\Delta = 3^2-4(1)(4) < 0$.

b) $P(x) = (x+2)(x^2+2x+2)$. Note : x^2+2x+2 est premier car $\Delta = 2^2-4(1)(2) < 0$.

c) $P(x) = (x-2)(x^2-2x-3) = (x-2)(x-3)(x+1)$.

d) $P(x) = (x+1)(x^3-8) = (x+1)(x-2)(x^2+2x+4)$. Note : x^2+2x+4 est premier car $\Delta = 2^2-4(1)(4) < 0$

Question 20

a) Faux, car il peut y avoir des facteurs de degré deux de la forme ax^2+bc+x

b) Faux. $\Delta = 1^1-4(1)(-6) > 0$.

Question 21

a) Non, car le facteur x^2-x+5 n'a pas de zéro : le discriminant $\Delta = b^2-4ac$ est négatif, il n'y a donc pas de zéros.

b) Laissé à l'étudiant.

c) Il n'y en a pas d'autres, d'après la factorisation.

Question 22

a) $(x-2)$ n'est pas un facteur de $P(x)$

b) Oui

Question 23

a) Chacun des termes de x^4+3x^2+2 consistent en une puissance paire de x avec un facteur positif, les valeurs prises par $P(x)$ sont donc toujours strictement positives. Elle n'admet donc pas de zéros.

b) Il existe une factorisation : $(x^2+1)(x^2+2)$. On peut la trouver en posant $y = x^2$ et en factorisant y^2+3y+2.

c) Chacun des facteurs de ce polynôme est irréductible. $P(x)$ n'a donc pas de facteur du premier degré, donc le théorème n'est pas contredit.

Question 24

Comme $P(x)$ se factorise en facteurs de degrés 1 ou 2 par le théorème fondamental de l'algèbre et que le degré du produit de ces facteur est la somme de leur degrés, une factorisation est possible seulement elle correspond à une décomposition de 5 en une somme des nombres 1 et 2. Il y a trois manières de faire une telle décomposition :

$$5 = 1+1+1+1+1$$
$$5 = 2+1+1+1$$
$$5 = 2+2+1$$

il y a trois factorisation possible Par le théorème de factorisation, chaque zéro distinct correspond à un facteur de degré 1.

$P(x)$ peut donc avoir 1, 3 ou 5 zéros différents.

Question 25

a) $\dfrac{(x+1)^4}{x^2+2x+1} = \dfrac{(x+1)^4}{(x+1)^2} = (x+1)^2$

b) $\dfrac{x^2-4}{x-2} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$

c) $\dfrac{x^2+x-6}{x^2+4x+3} = \dfrac{(x+3)(x-2)}{(x+1)(x+3)} = \dfrac{x-2}{x+1}$

d) $(x-2)^2(2x+1)^2\big((x-2)+(2x+1)\big) = (x-2)^2(2x+1)^2(3x-1)$

e) $(x-1)^9(x^2+2)^5+(x-1)^8(x^2+2)^6 = (x-1)^8(x+2)^5\big((x-1)+(x^2+2)\big) = (x-1)^8(x+2)^5(x^2+x+1)$

f) $\dfrac{(x-2)^3(x-1)^4-(x-2)^4(x-1)^3)}{x^2-x-2} = \dfrac{(x-2)^3(x-1)^3\big((x-1)-(x-2)\big)}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{(x-2)^2(x-1)^3}{x-1}$

Question 26

a) $y = \sqrt{25-x^2}$

b) $y = \sqrt{x^2-16}$

c) $y = x/\sqrt{2}$

d) $x = \sqrt{A}$

e) $h = \frac{A}{b}$

f) $A = x(5-x)$

Question 27

a) y^2+3y+4

b) $(y+1)^2+3(y+1)+4$

c) $(y+h)^2+3(y+h)+4$

d) $(x^2)^2+3(x)+4$

e) $(x+\Delta x)^2+3(x+\Delta x)+4$

f) $\dfrac{1}{(x+\Delta x)^2+1}$

g) $\dfrac{1}{((x+\Delta x)+1)^2}$

Question 28

a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) $f(x) = 1-x$, $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$

c) y pas une fonction de x car $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ peut prendre deux valeurs différentes.

d) En isolant, on trouve : $y = \pm\sqrt{1-x}$, ce qui ne définit pas une fonction.

e) En isolant, on trouve : $y = 1-x^2$, ce qui définit une fonction dont le domaine est $\mathbb{R}$.

f) $f(x) = -x$, $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$

g) $f(x) = 2x^2-3x+8$, $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$.

h) $f(x) = x^2$, $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Question 29

a) 27
b) 1
c) 27
d) $\sqrt{2}$
e) 2
f) $(1+h)^2 = 1+2h+h^2$
g) $(3+\Delta x)^3 = 27+27\Delta x + 9\Delta x^2 + \Delta x^3$
h) $\sqrt{y^2+1}$
i) $\frac{1}{y+\Delta x}$
j) 1
k) $(x+\Delta x)^{5/2}$
l) 0
m) $1/2$
n) Non défini (division par zéro).
o) 1
p) $(x+\Delta x)-1$
q) $\dfrac{1}{(x+\Delta x)^2}-1$
r) $((x+\Delta x)+1)^2-(x+\Delta x)$

Question 30

$$\frac{3^3-2^3}{3-2} = 27-8 = 19$$

Question 31

$$\frac{(2+\Delta x)^2-2^2}{(2+\Delta x)-2} = \frac{4\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}$$

Question 32

a) $6x-5$
b) $6x-10$
c) $2x+\frac{1}{x+1}$
d) $2x^3$
e) $2x^2$
f) $4x^2$
g) $\frac{2}{(x+1)^2}$
h) $\frac{1}{4x^2+1}$
i) $\frac{1}{(2x+1)^2}$

Question 33

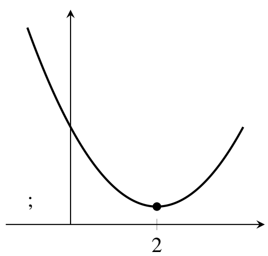
a) $y=-x+2$
b) $f(1) = 1^3-4(1) = -3$
c) y=-3x-6

Question 34

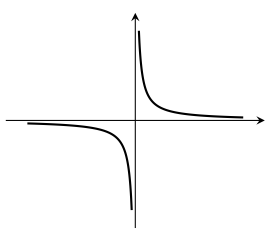
a) Ne croise pas l'axe des y, $x=\pm 2$
b) $y=3$, $x=3\sqrt{3}$
c) $y=2$, $x=-1$ ou 4
d) $y=-16$, $x=-2$ ou 2
e) $y=27$, $x=-3$
f) Ne croise pas l'axe des y, $x=-1/2$

Question 35

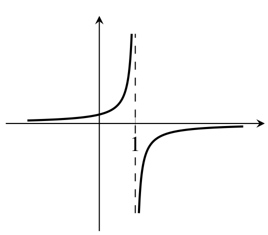
a)



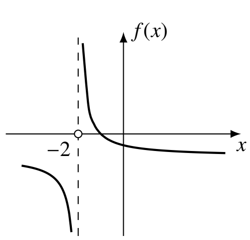
b)



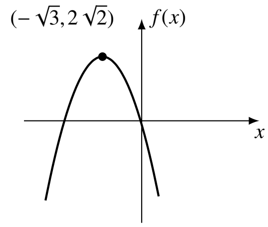
c)



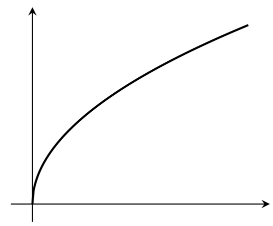
d)



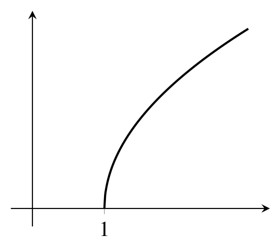
e)



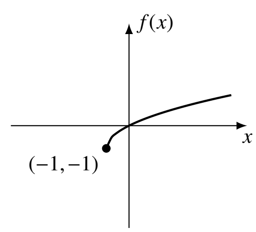
f)



g)



h)



Question 36

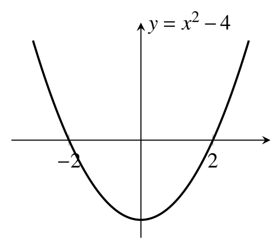
a) $f\big(g(x)\big) = 2\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{2}\right)-3 = x$ et $g\big(f(x)\big) = \frac{2x-3}{2}+\frac{3}{2} = x$, donc f et g sont des fonctions inverses.
b) f et g sont des fonctions inverses
c) f et g sont des fonctions inverses

Question 37

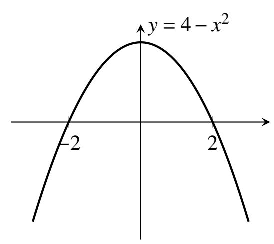
a) Faux.
b) Faux, car $\sqrt{x-2}$ est toujours positif quand défini. La condition est plutôt que $0 \le x-2$.

Question 38

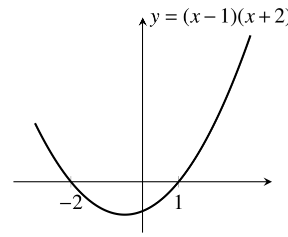
a) $x-2 \le 5 \iff x \le 2 \iff x \in]-\infty, 2]$
b) $1 \le 2x+3 \iff -2 \le 2x \iff -1 \le x \iff x \in [-1,\infty[$
c) $x+2 < 0 \iff x < -2 \iff x \in]-\infty,-2[$
d) $-x+1 \le 0 \iff -x \le -1 \iff x \ge 1 \iff x \in [1,\infty]$
e) $\dfrac{2-3x}{5} \le 4 \iff 2-3x \le 20 \iff -3x \le 18 \iff x \ge \frac{18}{-3} = -6 \iff \in]-\infty,-6]$
f)
$$\begin{aligned} &x+2 \ge 0 \text{ et } 2x-3 \ge 0 \\ &\iff x \ge -2 \text{ et } 2x \ge 3 \\ &\iff x \ge -2 \text{ et } x \ge \frac{3}{2} \\ &\implies x \ge \frac{3}{2} \\ &\iff x \in \left[\frac{3}{2},\infty\right[\end{aligned}$$
g)
$$\begin{aligned} &x+2 \ge 0 \text{ ou } 2x-3 \ge 0 \\ &\iff x \ge -2 \text{ ou } 2x \ge 3 \\ &\iff x \ge -2 \text{ ou } x \ge \frac{3}{2} \\ &\implies x \ge -2 \\ &\iff x \in [-2,\infty[\end{aligned}$$
h) $0 \le x^2-4 \iff 4 \le x^2 \iff x \le -2$ ou $2 \le x \iff x \in]-\infty,-2] \cup [2,\infty[$



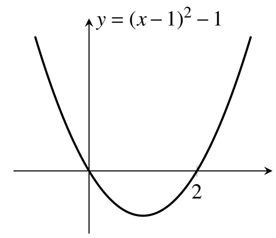
i) $0 \le 4-x^2 \iff x^2 \le 4 \iff -2 \le x \le 2 \iff x \in [-2,2]$



j) $0 \le (x-1)(x+2) \iff x \le -2$ ou $1 \le x \iff x \in]-\infty,-2] \cap [1,\infty[$



k) $0 \le (x-1)^2-1 \iff x \le 0$ et $2 \le x \iff x \in]-\infty,0] \cup [2,\infty[$



Question 39

a) $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R}$
b) $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\{3/2\}$
c) $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\{3,-2\}$
d) $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\{-5/2\}$
e) $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\{-4,4\}$
f) $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\{4\}$
g) $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\{2,-1\}$
h) $\operatorname{dom}(f) = [1,\infty[$
i) $\operatorname{dom}(f) = [5/2,\infty[$
j) $\operatorname{dom}(f) = [0,\infty[$
k) $\operatorname{dom}(f) = [1,\infty[$
l) $\operatorname{dom}(f) =]-\infty,-1] \cup [1,\infty[$
m) $\operatorname{dom}(f) = [-1,1]$
n) $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R}$
o) $\operatorname{dom}(f) =]-\infty,-1] \cup [3,\infty[$
p) $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R}$
q) $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$
r) $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R}$
s) $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\{1\}$
t) $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$
u) $\operatorname{dom}(f) =]-\infty,-1[\cup]5,\infty[$