Yannick Delbecque — Département de mathématiques, Cégep de Saint-Laurent
Calcul différentiel — 201-NYA — Hiver 2020

Devoir

> Ce devoir doit être remis en **Format PDF** via l'outil de remise de Léa au même moment que l'examen final.

Question 1
Lire l'annexe « Détermination d'un maximum à l'aide de la méthode de Fermat. »

a) Avec la méthode de Fermat, est-on certain d'avoir trouvé un maximum ?

b) Identifier où la dérivée est utilisée — sans que Fermat le dise.

c) Calculer la dérivée de la fonction A maximisée dans le problème à l'aide de la définition de dérivée vue dans le cours.

d) Expliquer en quoi la méthode de Fermat peut avoir mené à cette définition de la dérivée.

Question 2
Pour répondre à cette question, utiliser le texte en annexe, « Nouvelle méthode pour les maxima et les minima » de Leibniz. Vous pouvez répondre directement dans les copies du texte original (en surlignant, encadrant, soulignant ou autre), mais bien identifier à quelle question vous répondez.

a) Faire une liste du plus grand nombre de formules de dérivation que vous pouvez trouver dans les quatre page du texte de Leibniz. Pour chaque formule, indiquez la formule, la page (telle qu'indiquée dans la pagination originale, de 1 à 4) et le numéro de ligne.

b) Où Leibniz défini-t-il la dérivée dans son texte ? Donner la page et le numéro de ligne.

c) Où Leibniz donne-t-il un nom au nouveau « calcul » qu'il vient d'inventer ? (Indice : c'est le nom du cours que vous suivez !)

1 Détermination d'un maximum à l'aide de la méthode de Fermat

On veut déterminer quel rectangle de périmètre 8 a la plus grande aire. Soient x et y les côté d'un rectangle. L'aire du rectangle est donc $A = xy$. Comme le périmètre est 10, on doit aussi avoir que $2x + 2y = 8$, donc que $y = 4 - x$. En substituant dans A, on trouve que $A = x(4 - x) = 4x - x^2$.

On cherche le maximum de A. Si on perturbe un peu la valeur de x quand A est maximum, la valeur de A ne changera que très peu. Soit $E > 0$ une très petite quantité. $x + E$ est une valeur très près de x, mais différente de x. Dans ce cas, l'aire avec un côté de grandeur x est très près de celle avec un côté de grandeur $x + E$. Au point maximum, postulons que ces deux aires sont égales :

$$4(x+E) - (x+E)^2 = 4x - x^2.$$

En développant, on trouve que

$$4x + 4E - x^2 - 2xE - E^2 = 4x - x^2.$$

En simplifiant :

$$4E - 2xE - E^2 = 0.$$

Comme E^2 est beaucoup plus petit que E si E est très petit, on peut supposer que $E^2 = 0$, ce qui donne :

$$4E - 2xE = 0.$$

En mettant E en évidence, on trouve :

$$(4 - 2x)E = 0.$$

Comme $E > 0$, on doit avoir que $4 - 2x = 0$, c'est à dire que $x = 2$. Ainsi, l'aire du rectangle est maximale quand $x = 2$, et vaut donc

$$A = (2)(4 - 2) = 4.$$

2 Nouvelle méthode pour les maxima et les minima

Voici les quatre premières pages de la première traduction française d'un texte de Leibniz défini la dérivée et l'utilise pour trouver des maximums et des minimums.

Notez que les parenthèses n'étaient pas encore utilisées pour regrouper des expressions. Liebniz utilise une barre horizontale au dessus des opérations à regrouper, comme plusieurs mathématiciens de l'époque le faisait. Par exemple :

$$4(x+2) = 4 \cdot \overline{x+2}$$

C'est d'ailleurs Leibniz qui a inventé les parenthèses pour simplifier le travail des imprimeurs : les lignes horizontales était difficile à mettre en place à l'époque des caractère d'imprimerie en plomb et des presses.

Cette traduction est de Jean Peyroux, publiée en 1983 chez les éditions Bergeret, basées à Bordeau. ISBN 2-85367-082-1.

NOUVELLE METHODE POUR LES MAXIMA ET LES MINIMA,

et de même pour les tangentes, qui ne s'oppose ni aux quantités fractionnaires, ni irrationnelles, et un genre de calcul pour eux.

D'après les Actes des Savants de Leipzig de l'an 1684 (*NI*).

Soit l'axe AX,et plusieurs courbes, comme VV, WW, YY, ZZ,dont les ordonnées normales à l'axe, VX, WX, YX, ZX, qui soient appelées respectivement v,w, y, z ; et que l'abscisse elle-même AX depuis l'axe soit appelée x.Soient VB, WC, YD, ZE, les Tangentes allant à la rencontre de l'axe respectivement aux points B,C,D,E. En outre, qu'une certaine droite prise à volonté soit appelée *d*x; et que la droite qui soit à *d*x, comme v (ou w, ou y, ou z) est à XB (ou XC, ou XD, ou XE) *(NII)*, soit appelée *d*v(ou *d*w, ou *d*y, ou *d*z,soit la différence des v mêmes(ou des w mêmes,ou des y, ou des z). Cela étant posé,les règles du calcul seront telles.

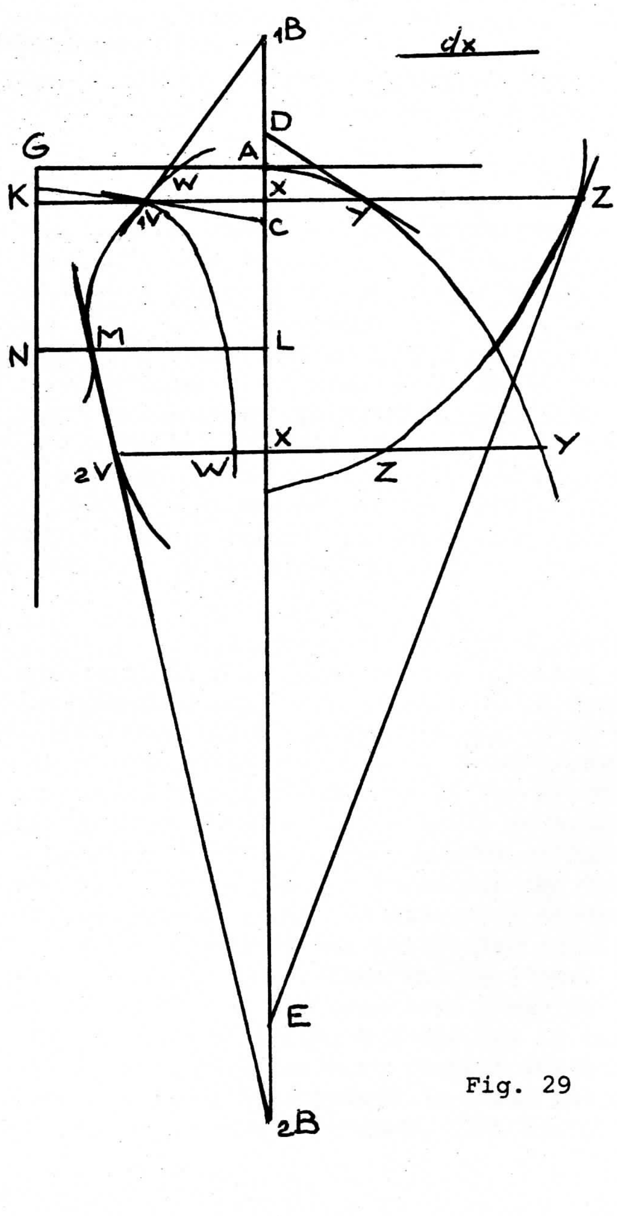

Fig. 29

Soit a une quantité constante donnée, *d*a sera égal à 0, et $d\overline{ax}$ sera égal à a*d*x : si y est fait égal à v(ou l'ordonnée que tu veux de la courbe YY égale à l'ordonnée que tu veux correspondant à la courbe W), *d*y sera égal à *d*v. Maintenant l'*Addition et la Soustraction* : si z - y + w+x est fait égal à v, $d\,\overline{z-y+w+x}$ ou *d*v sera égal à *d*z- *d*y+*d*w+ *d*x. *Multiplication :* *d* xv sera égal à

NOUVELLE METHODE POUR LES MAXIMA.

$xdv + vdx$, ou y étant posé égal à xv, dy sera fait $xdv + vdx$. Car il est à volonté d'employer ou la forme comme xv, ou par abréviation une lettre pour elle comme y. On doit noter que x et que dx sont traités de la même façon dans ce calcul, comme y et dy, ou une autre lettre indéterminée avec sa différentielle. On doit encore noter que le retour de la différentielle à l'équation n'est pas toujours donné, si ce n'est avec une certaine précaution dont [nous parlerons] ailleurs. Ensuite *la Division* $d\frac{v}{y}$ ou (z étant posé égal à $\frac{v}{y}$, dz sera égal à $\frac{\pm vdy \mp ydv}{yy}$.

Quant aux *Signes*, ceci est à beaucoup noter : lorsque dans le calcul est substituée pour la lettre, simplement sa différentielle, certes les mêmes signes sont à conserver, et pour +z, écris + dz ; pour -z, écris -dz ; comme il apparaît de l'addition et de la soustraction posées un peu avant ; mais quand on en vient à l'explication des valeurs, ou quand est considérée la relatíon de z même à x, alors il apparaît si la valeur de dz même est une quantité positive, si elle est plus petite que rien ou négative : et ensuite quand cela est fait, alors la tangente ZE est menée depuis le point Z, non vers A, mais dans les parties contraires ou en dessous de X, ce qui est alors quand les ordonnées elles-mêmes décroissent, les x croissant. Et parce que les ordonnées elles-mêmes maintenant croissent, maintenant décroissent, dv sera maintenant une quantité positive, maintenant négative, et dans le premier cas la tangente $_1V\,_1B$ est menée vers A ; dans le suivant $_2V\,_2B$ vers les parties adverses : d'autre part ni l'un ni l'autre n'est fait dans le milieu vers M, moment où les v mêmes ni ne croissent ni ne décroissent, mais elles sont en repos, et pour cette raison dv est fait égal à 0, où la quantité n'importe en rien, n'est faite ni positive ni négative,car + 0 égale-0 : et en ce lieu v même, c'est-à-dire l'ordonnée LM, est *maximale* (ou *minimale* si elle tournait la convexité vers l'axe), et la tangente à la courbe en M n'est pas conduite au-dessus de X vers les parties A, et là approche de l'axe, ni en dessous de X vers les parties contraires, mais elle est parallèle à l'axe. Si dv et dx sont égaux, la tangente fait un angle demi-droit à l'axe. Si les ordonnées v croissant,leurs accroissements ou différences dd v croissent (ou si les dv étant positifs les différences des différences ddv sont positives, ou négatifs, négatives), la courbe tourne *la convexité* vers l'axe ; autrement, *la concavité* : où assurément l'accroissement est maximum, ou minimum ; ou quand les accroissements sont faits croissants à partir de décroissants, ou contrairement, là est un *point de flexion contraire*, et la concavité et la convexité se permutent entre elles, presque, et là où les ordonnées seraient faites décroissantes à partir de croissantes, ou inversement, alors en effet la concavité ou la convexité persisterait : d'autre part que les accroissements continuent de croître ou de décroître, de plus que les ordonnées soient faites décroissantes à partir de croissants, ou le contraire, ce ne peut être fait. C'est pourquoi un point de flexion contraire a lieu, quand ni v ni dv ne paraissant 0, pourtant ddv est 0. D'où encore le problème de flexion contraire n'a pas deux racines égales comme le problème du maximum, mais trois.Et tout cela certes est attaché à l'emploi correct des signes.

Parfois d'autre part les *Signes* à employer sont *ambigus*, comme récemment dans la *division*, à savoir avant qu'il soit reconnu comment ils devraient être délivrés. Et certes si les x croissant, les $\frac{v}{y}$ croissent (décroissent), les signes ambigus dans $d\frac{v}{y}$ ou dans $\frac{\pm\, vdy \mp ydv}{yy}$ doivent être ainsi délivrés, afin que cette fraction soit faite une quantité positive (négative) . D'autre part $\mp$ indique le contraire de $\pm$ même, de sorte que si ceci est fait + cela est fait - , ou l'inverse. Plusieurs ambiguïtés peuvent se présenter dans le même calcul, que je distingue par des parenthèses, par exemple si $\frac{v}{y} + \frac{y}{z} + \frac{x}{v}$ était égal à w , il arriverait $\frac{\pm\, vdy \mp ydv}{yy} + \frac{(\pm)\, ydz\ (\mp)\ zdy}{zz} + \frac{((\pm))\, xdv\ ((\mp))\ vdx}{vv} = dw$, d'ailleurs les ambiguïtés issues des divers termes seraient mélangées. Où il doit être noté que le signe ambigu supporté en soi-même donne +, dans son contraire il donne - , dans l'autre ambigu il forme une nouvelle ambiguïté dépendant des deux.

Puissances : $dx^a = ax^{a-1}\, dx$, par exemple $dx^3 = 3x^2\, dx$; $d\frac{1}{x^a} = -\frac{a\, dx}{x^{a+1}}$, par exemple si W est fait égal à $\frac{1}{x^3}$, dW sera fait $-\frac{3\, dx}{x^4}$

Racines : $d\sqrt[b]{x^a} = \frac{a}{b}\, dx \sqrt[b]{x^{a-b}}$ (De là $d\sqrt[2]{Y} = \frac{dY}{2\sqrt[2]{Y}}$, en effet dans ce cas a est 1 et b est 2 ; donc $\frac{a}{b}\sqrt[b]{x^{a-b}}$ est $\frac{1}{2}\sqrt[2]{Y^{-1}}$, d'ailleurs Y^{-1} est le même que $\frac{1}{Y}$, d'après la nature des exposants de la progression Géométrique et $\sqrt[2]{\frac{1}{Y}}$ est $\frac{1}{\sqrt[2]{Y}}$); $d\frac{1}{\sqrt[b]{x^a}} = \frac{-\,adx}{b\sqrt[b]{x^{b+a}}}$.

D'autre part il aurait suffi de la règle des puissances entières tant pour les fractionnaires que pour les racines à déterminer, car la puissance est faite fractionnaire quand l'exposant est négatif, et est changée en racine quand l'exposant est fractionnaire : mais j'ai mieux aimé déduire moi-même ces conséquences que les laisser à d'autres à déduire, puisqu'elles sont tout à fait générales et se présentant souvent, et qu'il vaut mieux veiller à la facilité dans une chose par soi embarrassée.

De ceci connu comme *Algorithme* , que je dise ainsi, de ce calcul que j'appelle *différentiel* , toutes les autres égalités différentielles peuvent être trouvées par un calcul commun, et les plus grandes et les plus petites, et de même les tangentes sont tenues, de telle sorte qu'il n'est pas nécessaire d'enlever les fractionnaires ou irrationnelles, ou autres chaînes, ce que pourtant il fut à faire selon les Méthodes jusqu'ici montrées. La démonstration de toutes [ces formules] sera facile pour qui est versé dans ces choses et considérant ceci non assez examiné jusqu'ici , que dx, dy, dv, dw, dz mêmes peuvent être tenus pour proportionnels aux différences de x, y, v, w, z eux-mêmes (dans leur succession), soit aux accroissements, soit aux diminutions passagers. D'où il est fait que son équation différentielle peut être écrite comme une équation proposée quelconque, ce qui serait pour le *membre* que l'on veut (ce qui est pour la partie qui concourt à établir l'équation par la seule addition ou soustraction) à substituer simplement la quantité différentielle du membre, de plus pour une autre quantité (qui elle-même n'est pas un membre mais concourt au membre à former), sa quantité différentielle en employant son membre pour la quantité différentielle à former, non certes simplement, mais selon l'Algorithme jusqu'ici prescrit .

Assurément les Méthodes éditées jusqu'ici n'ont pas un tel passage, car ordinairement elles emploient une droite comme DX ou une autre de ce mode, non assurément une droite dy qui est une quatrième proportionnelle à DX, XY, dx, mêmes, ce qui trouble toutes les choses ; de là elles prescrivent d'ôter d'abord les [quantités] fractionnaires et irrationnelles (qui s'avancent indéterminées), il est visible encore que notre méthode est étendue aux lignes transcendantes qui ne peuvent être amenées vers le calcul Algébrique ou qui ne sont d'aucun degré déterminé, et cela par un mode universel, sans aucune supposition ne s'avançant pas toujours par un mode qui soit général : trouver la *tangente*, est mener une droite qui joint deux points de la courbe ayant une distance infiniment petite, ou le côté d'un polygone d'un nombre infini d'angles, ce qui pour nous est équivalent à une *courbe*. D'autre part cette distance infiniment petite peut être toujours exprimée par quelque différentielle connue comme dv ou par une relation à elle-même, ce qui est au moyen d'une certaine tangente connue. En particulier si y était une quantité transcendante, par exemple l'ordonnée d'une cycloïde, et que celle-ci s'avançât vers le calcul, dont l'ordonnée z serait déterminée par le moyen d'une autre courbe , et que dz soit cherchée, soit la tangente à cette seconde courbe au moyen d'elle, dans tous les cas dz serait à déterminer par dy ; d'autre part dy serait tenu parce qu'est tenue la tangente à la cycloïde. En outre la tangente elle-même de la cycloïde, si elle n'était pas encore possédée, pourrait être trouvée d'après la propriété donnée des tangentes du cercle.

Il plaît d'autre part de proposer un exemple de calcul où soit noté que je désigne ici la division de cette façon , x : y, ce qui est le même que x divisé par y ou $\frac{x}{y}$. Soit l'équation *première* ou donnée , $x : y + \overline{a + bx} \times \overline{c - xx}$: par le carré de $\overline{ex+fxx} + ax \sqrt{gg+yy} : \sqrt{hh+lx+mxx}$ égal à 0, l'équation exprimant la relation entre x et y ou entre AX et XY, étant posé que a,b,c,e,f,g,h,l,m elles-mêmes sont données ; est cherchée la manière de conduire depuis le point donné Y, YD qui tangente la courbe, ou est cherchée la raison de la droite DX à la droite donnée XY. Pour cause d'abréviation nous écrivons n pour a+bx ; p pour c-xx ; q pour ex + fxx ; r pour gg + yy ; s pour hh+lx+mxx ; l'équation sera faite $x : y + np : qq + ax\sqrt{r} + yy : \sqrt{s}$ égal à 0. Qui est l'Equation *Seconde* . Alors d'après notre calcul il est visible que $\overline{d\, x:y}$ est $\pm\, xdy \mp ydx : yy$; et semblablement $d\, np:qq$ est $(\pm)\ 2\underline{np}\, dq\ (\mp)\ \overline{qndp+pdn} : q^3$ et $d\, ax\sqrt{r}$ est $- axdr : 2\sqrt{r} + a\, dx.\sqrt{r}$; et $dyy : \sqrt{s}$ est $((\pm))\ yyds\ ((\mp))\ 4ysdy : 2\, s\sqrt{s}$; et ces deux quantités différentielles depuis $d\, x:y$ lui-même jusqu'à $dyy : \sqrt{s}$ ajoutées en une, feront 0 et donneront de cette façon l'équation *troisième* ; en effet leurs quantités différentielles sont substituées pour les membres de la seconde équation. Maintenant dn est bdx, etdp est $-2xdx$, et dq est $edz+ 2fxdx$, et dr est $2ydy$, et ds est $ldx + 2mxdx$. Et ces valeurs étant substituées dans l'Equation, l'équation *quatrième* sera tenue où les quantités différentielles qui seules subsistent, c'est-à-dire dx et dy sont toujours trouvées au delà des nomimales , et chaque membre enchaîné et unique est affecté ou par dx ou par dy, la loi d'homogénéité étant toujours sauvée quant à ces deux quantités, de quelque mode que le calcul soit enlacé ; d'où la valeur de $dx : dy$ peut toujours être tenue, ou la raison de dx à dy, ce qui est DX cherchée à XY donnée, et cette raison sera dans ce notre calcul (en changeant la quatrième équation par Analogie) comme $\pm\, x : y + axy : \sqrt{r}\ ((\pm))\ 2\, y : \sqrt{s}$ est à $\mp\, 1:y\ (\mp)\ 2\, npe+2fx:q^3\ (\mp)\ -\overline{2nx+pb} : qq+a\sqrt{r}\ ((\pm))\, yy\, \overline{l+2mx} : 2\, s\sqrt{s}$. D'autre part x et y sont donnés d'après le point Y. Et sont données les valeurs des lettres écrites ci-dessus n,p,q,r,s au moyen de x et y. Donc ce qui est cherché est possédé. Et nous avons ajouté cet exemple assez embrouillé seulement pour cette raison qu'apparaisse le mode de se servir des règles dans un calcul encore plus difficile. Maintenant il vaut mieux montrer l'emploi sur des exemples plus à portée de l'entendement.