Limites et dérivées de fonctions exponentielles et logarithmes

Révision logarithmes

Question 1
Évaluer et simplifier.

a) $\log_{10}(1000)$
b) $\log_{100}(10)$
c) $\log_2(8)$
d) $\log_3\left(\frac{1}{9}\right)$
e) $\log_3\left(\sqrt[4]{9}\right)$
f) $\log_2\left(\sqrt{2^5}\right)$
g) $\log_3(54)$
(ind. $\log_3(2) \approx 0,63$)
h) e^0
i) e^1
j) $\ln(1)$
k) $\ln\left(e^3\right)$
l) $\ln\left(\sqrt{e}\right)$
m) $\ln(e)$
n) $\log_2\left(\left(2^{11}\right)^9\right)$
o) $\log_2\left(\frac{5}{2}\right) - \log_2\left(\frac{10}{2}\right)$

Question 2
Résoudre les équations suivantes.

a) $\log_2(x) = 5$
b) $\log_3(x) = 4$
c) $\log_5(x) = \frac{1}{2}$
d) $\log_{10}(x) = 3$
e) $\ln(x) = 0$
f) $\ln(x) = 1$
g) $\ln(x) = 10$
h) $3^x = 100$
i) $5 \cdot 3^x = 2^{x+1}$
j) $2\log_4(x) - \log_4(x-1) = 1$

Question 3
Déterminer le domaine des fonctions suivantes.
Rappel : $\log_b(A)$ est défini $\iff A > 0$ et $\log_b(A) = 0 \iff A = 1$

a) $f(x) = \log_2(x-2)$
b) $f(x) = \log_2(3-x)$
c) $f(x) = \log_2(x^2)$
d) $f(x) = \log_2(x^2-1)$
e) $f(x) = \frac{1}{\log_2(x)}$

Limites exponentielles et logarithmes

Question 4
Évaluer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to 0} e^x$
b) $\lim\limits_{x\to 2} e^x$
c) $\lim\limits_{x\to 2} e^{x-1}$
d) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} e^{x+1}$
e) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} e^x$
f) $\lim\limits_{x\to \infty} e^x$
g) $\lim\limits_{x\to \infty} -e^x$
h) $\lim\limits_{x\to \infty} e^{-x}$
i) $\lim\limits_{x\to \infty} -e^{-x}$
j) $\lim\limits_{x\to \infty} e^{x-1}$
k) $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{1/x}$
l) $\lim\limits_{x\to 0} e^{1/x}$

Question 5
Évaluer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x)$
b) $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln(x-1)$
c) $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln(x-1)$
d) $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln(x)$
e) $\lim\limits_{x\to e} \ln(x)$
f) $\lim\limits_{x\to e} \ln(x^2)$
g) $\lim\limits_{x\to 2^+} \ln(x-1)$
h) $\lim\limits_{x\to \infty} \ln(x+2)$
i) $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{\ln(x)}$
j) $\lim\limits_{x\to (-5)^+} \ln(25-x^2)$

Question 6
Évaluer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to 2^+} \log_2(x-2)$
b) $\lim\limits_{x\to 2^-} \log_2(x-2)$
c) $\lim\limits_{x\to 2} \log_2(x-2)$
d) $\lim\limits_{x\to 1} \ln\left(x^2-2x+1\right)$
e) $\lim\limits_{x\to 3} \ln\left(x^2-6x+9\right)$

Question 7
Trouver les asymptotes des fonctions suivantes.

a) $f(x) = e^{x-2}$
b) $f(x) = \ln(x-2)$
c) $y = \log\left(x^2-1\right)$
d) $y = \ln\left(\frac{x-2}{x-3}\right)$
e) $f(x) = \begin{cases} e^x+4 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^3-1}{x+2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Question 8
Évaluer les limites suivantes

a) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x$
b) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{1}{2^x}$
c) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{1}{2^{-x}}$
d) $\lim\limits_{x\to -\infty} 2^x$
e) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x$
f) $\lim\limits_{x\to 2} 3^{(x^2-4)}$
g) $\lim\limits_{x\to \infty} e^{1/x}$
h) $\lim\limits_{x\to \infty} \log_{1/3}(x)$
i) $\lim\limits_{x\to \infty} \log_2\left(x^2-3x+2\right)$
j) $\lim\limits_{x\to 8} \frac{\log_2(x)}{x-5}$
k) $\lim\limits_{x\to 4^+} \frac{5}{\log_3(x-4)}$
l) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\sqrt{x}+\ln(-x)\right)$

Dérivées

Question 9
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$
b) $f(x) = 3^{2x}$
c) $f(x) = x^3 + 3^x$
d) $y = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{4}$
e) $y = \mathrm{e}^{x^2+3x+4}$
f) $f(x) = \ln\left(x^2\right)$
g) $f(x) = \log_2\left(x^2\right)$
h) $y = \ln\left(x^2 + 3x + 4\right)$
i) $y = 3^x + 3^{-x} + x^3 + 3x$
j) $y = 8^{2^x + x^2}$
k) $y = \dfrac{x^3}{e^x}$
l) $y = x \cdot 8^x$

Question 10
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $y = \log_5\left(x^3 + 1\right)$
b) $y = \dfrac{\ln(x)}{x}$
c) $y = x^4\left(\ln(x)\right)^5$
d) $y = \sqrt{\log_3(x)}$

Question 11
Trouver $\dfrac{dy}{dx}$ pour chacune des relations suivantes.

a) $\mathrm{e}^y = x^2$.
b) $\ln(x + y) = y^2$.
c) $\mathrm{e}^{x+y} = y^2 + 1$
d) $x\ln(y) - 3xy^2 = 0$

Question 12
Soit la fonction $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

a) Faire l'étude complète de croissance, concavité et asymptotes de cette fonction puis tracer son graphique.
b) Trouver les dimensions du rectangle d'aire maximale que l'on peut inscrire entre l'axe des x et la courbe de f.

Question 13
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $y = \mathrm{e}^{\sqrt{x}} + \sqrt{\mathrm{e}^x}$
b) $y = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{x-5}}$
c) $y = 2^{3^{5^x}}$
d) $y = \ln(x)\log(x)$
e) $y = \dfrac{\ln x^4}{x^4}$
f) $y = \left(x + \ln^2(x)\right)^5$

Applications

Question 14
Déterminer l'équation de la droite tangente en $x = 2$ à la courbe d'équation

$$y = \mathrm{e}^{2-x}.$$

Question 15
Trouver les extremums locaux de la fonction

$$y = \ln^2\left(2x^2 - x\right).$$

Question 16
Soit la fonction $f(x) = x + \ln\left(x^2 + 1\right)$

a) Montrer que f est toujours croissante
b) Étudier la concavité de f et donner les points d'inflexion.

Question 17
Un virus se propage de telle sorte que le nombre de personnes atteintes du virus t semaines après son apparition est donné par

$$N(t) = \frac{5000}{2 + 8e^{-\frac{3t}{4}}}.$$

a) Initialement, combien de personnes sont porteuses du virus
b) Combien de personnes seront atteintes 4 semaines après son apparition ?
c) Dans combien comptera-t-on 1300 victimes ?
d) À long terme, combien de personnes contracteront ce virus ?
e) Quel est le taux de propagation du virus après 2 semaines ?
f) Quel est ce taux à long terme ?
g) À quel moment le virus se propage-t-il le plus rapidement ?

Question 18
Une étude menée auprès d'athlètes olympiques révèle que la capacité pulmonaire de ces derniers obéit à la fonction

$$C(x) = \frac{0,8\ln(x) - 1,8}{0,009x},$$

où x est l'âge de l'athlète. À quel âge un athlète a-t-il une capacité pulmonaire maximale ?

Solutions

Question 1

a) 3 (car $10^3 = 1000$)

b) 1/2 (car $100^{1/2} = 10$

c) 3 (car $2^3 = 8$)

d) -2 (car $3^{-2} = \frac{1}{9}$)

e) 1/2

f) 5/2

g) 3,63 (car $\log_3(54) = \log_3(2 \cdot 27) = \log_3(2) + \log_3(27)$

h) 1

i) e

j) 0

k) 3

l) 1/2

m) 1

n) 99

o) -1

Question 2

a) $x = 32$

b) $x = 81$

c) $x = \sqrt{5}$

d) $x = 1000$

e) $x = 1$

f) $x = \mathrm{e}$

g) $x = \mathrm{e}^{10}$

h) $x = \ln_3(100)$

i) $x = \dfrac{\ln(2/5)}{\ln(3/2)}$

j) $x = 2$

Question 3

a) $\log_2(x-2)$ def $\iff x-2>0 \iff x>2$.

$\mathrm{Dom}(f) =]2,\infty[$.

b) $\log_2(3-x)$ def $\iff 3-x>0 \iff 3>x$.

$\mathrm{Dom}(f) =]-\infty,3[$.

c) $\log_2(x^2)$ def $\iff x^2>0 \iff x \neq 0$.

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

d) $\log_2(x^2-1)$ def $\iff x^2-1>0 \iff x^2>1 \iff x>1$ ou $x<-1$.

$\mathrm{Dom}(f) =]-\infty,-1[\cup]1,\infty[$.

e) $\log_2(x)$ def $\iff x>0$.

$\frac{1}{\log_2(x)}$ déf $\iff \log_2(x) \neq 0 \iff x \neq 1$.

$\mathrm{Dom}(f) =]0,\infty[\setminus\{1\}$.

Question 4

a) 1

b) e^2

c) e

d) $\sqrt{\mathrm{e}^3}$

e) $\sqrt{\mathrm{e}}$

f) ∞

g) $-\infty$

h) 0^+

i) 0^-

j) ∞

k) ∞

l) $\nexists$

Question 5

a) $-\infty$

b) $-\infty$

c) $\nexists$

d) 0

e) 1

f) 2

g) 0

h) ∞

i) ∞

j) $-\infty$

Question 6

a) $-\infty$

b) $\nexists$

c) $-\infty$ (car x doit rester dans le domaine)

d) $-\infty$ car $x^2-2x+1 = (x-1)^2 \geq 0$

e) $-\infty$

Question 7

a) Pas d'AV, AH $y = 0$ car $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x-2} = 0$.

b) Pas d'AH, AV en $x = 2$ car $\lim_{x\to 2^+} \ln(x-2) = \ln(0^+) = -\infty$.

c) Pas d'A.H. ; A.V. en $x = 0$.

d) A.H. en $y = 0$; A.V. en $x = 2$ et en $x = 3$.

e) A.H. en $y = 4$; pas d'A.V.

Question 8

a) 0

b) 0

c) 0

d) 0

e) ∞

f) 1

g) 1

h) $-\infty$

i) $\nexists$

j) 1

k) 0

l) $\nexists$

Question 9

a) $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x}$

b) $f'(x) = 2 \cdot 3^{2x} \ln(3)$

c) $f'(x) = 3x^2 + 3^x \ln(3)$

d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}$

e) $y' = (2x+3)\mathrm{e}^{x^2+3x+4}$

f) $f'(x) = \dfrac{2}{x}$

g) $f'(x) = \dfrac{2}{x\ln(2)}$

h) $f'(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+3x+4}$

i) $\dfrac{dy}{dx} = 3^x\ln(3) - 3^{-x}\ln(3) + 3x^2 + 3$

j) $\dfrac{dy}{dx} = 8^{2^x+x^2}(2^x\ln(2) + 2x)\ln(8)$

k) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2(3-x)}{\mathrm{e}^x}$

l) $\dfrac{dy}{dx} = 8^x(1 + x\ln(8))$

Question 10

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2}{(x^3+1)\ln(5)}$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$

c) $\dfrac{dy}{dx} = x^3(\ln(x))^4(4\ln(x)+5)$

d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2x\ln(3)\sqrt{\log_3(x)}}$

Question 11

a) On suppose que $y = f(x)$. En dérivant $\mathrm{e}^y = x^2$, on obtient

$$\mathrm{e}^y y' = 2x.$$

On isole y' :

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{2x}{\mathrm{e}^y}.$$

b) On suppose que $y = f(x)$. En dérivant $\ln(x+y) = y^2$, on obtient

$$\frac{1}{x+y}(1+y') = 2yy')$$

On isole y' :

$$\frac{1}{x+y}(1+y') = 2yy'$$

$$\frac{1}{x+y} + \frac{y'}{x+y} = 2yy'$$

$$\frac{y'}{x+y} - 2yy' = -\frac{1}{x+y}$$

$$\left(\frac{1}{x+y} - 2y\right)y' = -\frac{1}{x+y}$$

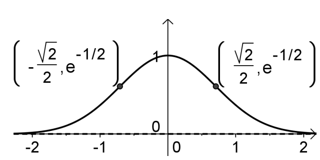
On trouve donc que

$$\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{1}{\left(\frac{1}{x+y} - 2y\right)(x+y)} = -\frac{1}{1-2y(x+y)}.$$

c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\mathrm{e}^{x+y}}{2y - \mathrm{e}^{x+y}}$

d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y\ln(y) - 3y^3}{6xy^2 - x}$

Question 12

a) 

b) Base de $\sqrt{2}$, hauteur de $\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

Question 13

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{\mathrm{e}^x}}{2}$

b) $\dfrac{dy}{dx} = e^{\frac{x^2}{x-5}} \dfrac{x^2-10x}{(x-5)^2}$

c) $\dfrac{dy}{dx} = 2^{3^{5^x}} 3^{5^x} 5^x \ln(2)\ln(3)\ln(5)$

d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2\log(x)}{x}$

e) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4-16\ln(x)}{x^5}$

f) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{5\left(x+\ln^2(x)\right)^4(x+2\ln(x))}{x}$

Question 14

$y' = -\mathrm{e}^{2-3x}$. En $x = 2$, $y = \mathrm{e}^{2-2} = \mathrm{e}^0 = 1$ et $y' = -\mathrm{e}^{2-2} = -1$.

La droite est donc de la forme $y = ax + b$ avec comme pente $a = -1$. On cherche b. Comme la droite tangente passe par le point $(2,1)$ on doit avoir $2 = -1 + b$, donc $b = 3$. L'équation de la droite tangente est donc

$$y = -x + 3.$$

Question 15

Aucun max. local, min. local en $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ et en $(1,0)$.

Question 16

a) Laissé à l'étudiant. Montrer que la dérivée est toujours ≥ 0

b) Concave vers le haut sur $[-1,1]$, concave vers le bas sur $]-\infty,-1]$ et $[1,\infty[$, points d'inflexion en $x = -1$ et $x = 1$.

Question 17

a) 500 personnes

b) Environ 2085 personnes

c) 1,96 semaines

d) $\lim_{t\to\infty} N(t) = 2500$ personnes

e) $N'(2) = 467,24$ personnes/semaine

f) $\lim_{t\to\infty} N'(t) = 0$ personnes (il faut mettre en évidence les termes dominants)

g) Il faut trouver le maximum de $N'(t)$. Comme $N''(t‘) < 0$ pour tout $x > 0$, $N'(t)$ est maximale lorsque $t = 0$.

Question 18

$\mathrm{e}^{13/4} \approx 25,79$ ans