

Exercices sur la définition de dérivée avec limites – Calcul différentiel

Département de mathématiques – Cégep de Saint-Laurent
201-NYA – Hiver 2020 – Professeur : Yannick Delbecque

http://prof.delbecque.org – prof@delbecque.org – Bureau C286 – 514-747-6521 poste 7289

Question 1

Déterminer le TVI $\frac{dy}{dx}$ des fonctions suivantes au point donné à l'aide de la définition de dérivée en terme de limites (sans utiliser les formules de dérivation).

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- | | |
|--------------------------------------|--|
| a) $y = x^2$ quand $x = 2$. | f) $y = \frac{3}{x^2}$ quand $x = 2$. |
| b) $y = x^3$ quand $x = 2$. | g) $y = x^2$ quand $x = a$. |
| c) $y = 3x$ quand $x = 2$. | h) $y = x^3$ quand $x = a$. |
| d) $y = 2$ quand $x = 2$. | i) $y = \frac{1}{x}$ quand $x = a$. |
| e) $y = \frac{1}{x}$ quand $x = 2$. | |

Question 2

Déterminer $\frac{dy}{dx}$ à l'aide de la définition de dérivée en terme de limites.

- | | | |
|---------------------------|-----------------------------|-------------------------|
| a) si $y = x^4$ | c) si $y = \frac{x^2}{x+1}$ | e) si $y = x^2 + x + 1$ |
| b) si $y = \frac{1}{x^2}$ | d) si $y = 1 - x^2$ | f) si $y = \sqrt{x-1}$ |

Question 3

Utiliser les deux formes de la définition de la dérivée à l'aide de limites pour calculer $f'(2)$ si $f(x) = x^3$.

Question 4

Trouver la dérivée des fonctions suivantes en utilisant les deux formes de la définition en terme de limites.

- | | |
|-----------------------------|---|
| a) $f(x) = x^2$ | e) $f(x) = 2x^2 - x$. |
| b) $f(x) = x^3$ | f) $y = \sqrt{x^2 + 1}$. |
| c) $g(x) = \sqrt{x+3}$ | g) $g(x) = \frac{2}{3x} - \frac{1}{3x^2}$. |
| d) $h(x) = \frac{x+3}{x+5}$ | |

Question 5

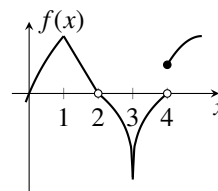
En utilisant la définition de la dérivée donnée à l'aide de limites, évaluer les expressions demandées pour la fonction donnée.

- a) $f'(2)$ pour $f(x) = 2x^2 - x$.
- b) $\frac{dx}{dt}$ pour $x(t) = at^2 + bt + c$.
- c) $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=-1}$ pour $y = \sqrt{x^2 + 1}$.

- d) $g'(x)$ pour $g(x) = \frac{2}{3x} - \frac{1}{3x^2}$.
- e) $h'(0)$ pour $h(x) = \frac{-4x}{\sqrt{1-5x}}$.

Question 6

Pour les valeurs $x = 1, 2, 3, 4$, déterminer si la fonction f a un point anguleux, un point de rebroussement, une discontinuité essentielle ou non-essentielle, n'est pas définie ou n'est pas dérivable. (Donner toutes les caractéristiques qui s'appliquent.)



Question 7

Démontrer que $(2x+1)' = 2$ à l'aide de la définition de dérivée et des propriétés des limites.

Question 8

Démontrer que si f est dérivable pour n'importe quelle valeur de x , alors $(2f(x)+1)' = 2f'(x)$ à l'aide de la définition de dérivée et des propriétés des limites.

Question 9

Démontrer que $((x+1)^2)' = 2(x+1)$ à l'aide de la définition de dérivée et des propriétés des limites.

Question 10 (10 points)

Démontrer à l'aide de la définition de la dérivée et des propriétés des limites que

$$(f(x) + Cx)' = f'(x) + C$$

pour une constante C quelconque et en supposant que la dérivée $f'(x)$ existe.

Question 11

Montrer que $f(x) = |2x-3|$ n'est pas dérivable en $x = 3/2$.

Question 12

Montrer que $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ n'est pas dérivable en $x = 0$.

Question 13

Démontrer que si f est dérivable pour n'importe quelle valeur de x , alors $(f(x)^2)' = 2f(x)f'(x)$ à l'aide de la définition de dérivée et des propriétés des limites. (Difficile car il faut des trucs algébrique! Le truc est dans la preuve de la dérive des fonctions composées (avec les limites!))

Solutions

Question 1

a)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} \Big|_{x=2} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2+\Delta x)^2 - (2)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2+2\Delta x + \Delta x^2) - (2)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2 + \Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2 + \Delta x \\ &= 2 + 0 \\ &= 2 \end{aligned}$$

b) 12

c) 3

d) 0

e) $-\frac{1}{4}$

f) $-\frac{3}{4}$

g) $2a$

h) $3a^2$

i) $-\frac{1}{a^2}$

Question 2

a) $\frac{dy}{dx} = 4x^3$

c) $\frac{dy}{dx} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

d) $\frac{dy}{dx} = -2x$

b) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^3}$

e) $\frac{dy}{dx} = 2x + 1$

f)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(x+\Delta x)-1} - \sqrt{x-1}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(x+\Delta x)-1} - \sqrt{x-1}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{(x+\Delta x)-1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{(x+\Delta x)-1} + \sqrt{x-1}} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x) - 1 - (x-1)}{\Delta x (\sqrt{(x+\Delta x)-1} + \sqrt{x-1})} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x (\sqrt{(x+\Delta x)-1} + \sqrt{x-1})} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{(x+\Delta x)-1} + \sqrt{x-1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(x+0)-1} + \sqrt{x-1}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \end{aligned}$$

Question 3

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2+\Delta x)^3 - 2^3}{\Delta x} = 12$$

(forme indéterminée 0/0, utilisez le triangle de Pascal pour développer $(2+\Delta x)^3$).

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2^3}{x - 2} = 12$$

(utiliser la factorisation $x^3 - 2^3 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$ pour lever l'indétermination 0/0)

Question 4

a) $f'(x) = 2x$

Forme 1 :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x + \Delta x \\ &= 2x \end{aligned}$$

Forme 2 :

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} x + a \\ &= a + a \\ &= 2a \end{aligned}$$

Donc $f'(x) = 2x$.

b) $f'(x) = 3x^2$

c) $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$

d) $h'(x) = \frac{2}{(x+5)^2}$

e) $f'(x) = 4x - 1$

f) $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

g) $g'(x) = \frac{-2}{3x^2} + \frac{2}{3x^3}$

Question 5

a) 7

b) $2at + b$

c) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

d) $\frac{-2x+2}{3x^3}$

e) -4

Question 6

$x=1$ non-dérivable, point anguleux

$x=2$ non-dérivable, discontinuité non-essentielle

$x=3$ non-dérivable, point de rebroussement

$x=4$ non-dérivable, discontinuité essentielle

Question 7

$$\begin{aligned} (2x+1)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2(x+\Delta x)+1) - (2x+1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2x+2\Delta x+1) - 2x-1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Question 8

$$\begin{aligned} (2f(x)+1)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2f(x+\Delta x)+1) - (2f(x)+1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2f(x+\Delta x)+1) - 2f(x) - 1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2f(x+\Delta x) - 2f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2 \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= 2f'(x) \end{aligned}$$

Question 9

$$\begin{aligned} ((x+1)^2)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{((x+\Delta x)+1)^2 - (x+1)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 2(x+\Delta x)+1) - (x^2 + 2x+1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 2x + 2\Delta x + 1 - x^2 - 2x - 1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2x+2)\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2(x+1) + \Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2(x+1) + \Delta x \\ &= 2(x+1) \end{aligned}$$

Question 10

$$\begin{aligned} (f(x)+Cx)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)+C(x+\Delta x) - (f(x)+Cx)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x) + C(x+\Delta x) - Cx}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{C(x+\Delta x) - Cx}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C(x+\Delta x) - Cx}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} C \frac{x+\Delta x-x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} C \\ &= f'(x) + C. \end{aligned}$$

Question 11

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|2(\frac{3}{2} + \Delta x) - 3| - |2\frac{3}{2} - 3|}{\Delta x} & \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|2(\frac{3}{2} + \Delta x) - 3| - |2\frac{3}{2} - 3|}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|2\Delta x| - 0}{\Delta x} & &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|2\Delta x| - 0}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{2|\Delta x|}{\Delta x} & &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{2|\Delta x|}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{2\Delta x}{\Delta x} & &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-2\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} 2 & &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} -2 \\ &= 2 & &= -2 \end{aligned}$$

Comme les limites à droites et à gauche n'existent pas, la limite $\Delta x \rightarrow 0$ n'existe pas et la fonction f n'est pas dérivable en $x = 0$.

Question 12

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0^\pm} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^\pm} \frac{\sqrt[3]{(0+\Delta x)^2} - \sqrt[3]{0}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^\pm} \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^\pm} \frac{\Delta x^{2/3}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^\pm} \frac{1}{\Delta x^{1/3}} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^\pm} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}} \\ &= \frac{1}{0^\pm} \\ &= \pm\infty \end{aligned}$$

Comme $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ n'existe pas, la fonction f n'est donc pas dérivable en $x = 0$.

Question 13

$$\begin{aligned} ((f(x))^2)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f(x+\Delta x))^2 - (f(x))^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f(x+\Delta x))^2 - (f(x))^2}{\Delta x} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{f(x+\Delta x) - f(x)} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f(x+\Delta x))^2 - (f(x))^2}{f(x+\Delta x) - f(x)} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f(x+\Delta x))^2 - (f(x))^2}{f(x+\Delta x) - f(x)} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{(y+\Delta y)^2 - y^2}{\Delta y} f'(x) \text{ En posant } y = f(x) \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{y^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2 - y^2}{\Delta y} f'(x) \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{2y\Delta y + \Delta y^2}{\Delta y} f'(x) \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} (2y + \Delta y) f'(x) \\ &= 2y f'(x) \\ &= 2f(x) f'(x) \end{aligned}$$

Note : en posant $y = f(x)$, $f(x+\Delta x) - f(x)$ est Δy . Comme f est dérivable, elle est aussi continue. Alors $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x+\Delta x) - f(x) = 0$. On peut donc dire que $\Delta y \rightarrow 0$. Enfin, $f(x+\Delta x) = y + \Delta y$.