Exercices sur les formules dérivations et quelques applications

Calcul différentiel – Hiver 2020 – Yannick Delbecque

Dérivées de puissances

Question 1 (10 points)
Voici quatre des propriétés de base pour la dérivée.

(D1) $\dfrac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$ (D3) $\dfrac{d(Cu)}{dx} = C\dfrac{du}{dx}$

(D2) $\dfrac{d(C)}{dx} = 0$ $(C \in \mathbb{R})$ (D4) $\dfrac{d(u+v)}{dx} = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$

Calculez la dérivée de la fonction $y = \dfrac{x^2}{2} + 2x^5$ en n'utilisant que les propriétés (D1) à (D4) et en spécifiant à chaque étape du calcul quelle propriété est utilisée.

Question 2
Trouver la dérivée des fonctions suivantes à l'aide des propriétés de la dérivée (les « formules de dérivation »). Exprimer le résultat sans utiliser d'exposants fractionnaires ou négatifs.

a) $y = x^9$
b) $y = x^{-12}$
c) $f(x) = x^{7/4}$
d) $y = \dfrac{1}{x^3}$
e) $y = \dfrac{1}{x^6}$
f) $f(x) = \sqrt[5]{x}$
g) $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$
h) $u = \sqrt[5]{x^2}$
i) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$
j) $x(t) = \dfrac{3}{7\sqrt[3]{t^5}}$

Question 3
Trouver la dérivée des fonctions suivantes.

a) $f(x) = 4$
b) $v(t) = t$
c) $h(x) = 5x^3$
d) $x(t) = \dfrac{3t}{4}$
e) $y = -\dfrac{9}{5\sqrt[4]{x}}$
f) $x(r) = \dfrac{5}{8r}$
g) $f(x) = 8x^3 - 4x^2 + 9x - 1$
h) $y = \dfrac{4}{\sqrt[3]{x^2}} - 5x^7 + \dfrac{1}{6x^3} - \dfrac{3}{4}$
i) $f(x) = \left(x^2 - 3\right)(4x+1)$
j) $y = 5\left(2 - x^3\right)^2$
k) $f(x) = (3x+1)^3$
l) $g(t) = 4\left(\dfrac{3}{t^2} + 1\right)\left(1 - t^3\right)$

Question 4
Donner la dérivée de chacune des fonctions au point indiqué.

a) $f(x) = 3x + 1$ au point $(2, 7)$.
b) $s(t) = -t^3 + 2t^2 + 3t - 2$ au point $(-1, -2)$.
c) $y = \dfrac{2}{3x} - \dfrac{4}{5x^2}$ au point $(1, -2/15)$.
d) $f(t) = \dfrac{t^3 - 4t}{2}$ au point $(k, f(k))$.

Question 5
Donner l'équation de la droite tangente au graphe de f pour la valeur donnée de x.

a) $f(x) = x^2$, en $x = -2$.
b) $f(x) = x^3$, en $x = 1$.
c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, en $x = 1$.
d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, en $x = 3$.
e) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, en $x = \sqrt{2}$.
f) $f(x) = \sqrt{x}$, en $x = 1$.
g) $f(x) = \sqrt{x}$, en $x = 4$.

Question 6
Pour quelle(s) valeur(s) de x la courbe décrite par la fonction $f(x)$ admet-elle une tangente horizontale ?

a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$.
b) $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - x$.
c) $f(x) = \dfrac{x^5}{5} - x$.
d) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$.
e) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.
f) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$.

Question 7
Déterminer pour quelle valeur de x la fonction quadratique

$$f(x) = \frac{x^2}{4} - 3x - 1$$

atteint un maximum. (Ind. la tangente est horizontale à un point maximum).

Question 8
Trouver une valeur de x pour laquelle la fonction $y = \dfrac{1}{x^2}$ admet une droite tangente parallèle à la droite $y = \frac{x}{4} - 1$.

Question 9
Trouver deux valeurs de x pour laquelle la fonction $y = x^3 - 3x$ admet une droite tangente perpendiculaire à la droite $y = \frac{3x}{5} - 1$. (Rappel : si deux droites sont perpendiculaires, le produit de leurs pentes est -1.)

Question 10
Utilisez l'approximation des fonctions donnés par leur droite tangente en $x = a$ pour trouver une approximation des valeurs des fonctions.

a) $f(x) = x^2$ près de $x = 3$; approximer $f(3.1)$.
b) $f(x) = x^3$ près de $x = 1$; approximer $f(0.9)$.
c) $f(x) = \frac{1}{x}$ près de $x = 10$; approximer $f(11)$.
d) $f(x) = \sqrt{x}$ près de $x = 4$; approximer $f(4.1)$.

Question 11
Illustrer par une esquisse le fait que si $y = x + 2$ est une fonction de x, alors $dy = dx$.

Question 12
Il y a deux droites passant par le point $(4,20)$ qui sont tangentes à la parabole donnée par la fonction $y = 8x - x^2$. Trouver les équations de ces droites. Pour vous aider, faire une esquisse de la situation.

Dérivée de produits et de quotients

Question 13
Calculer la dérivée de $x^2(2x-1)$ de deux manières différentes : en utilisant la règle de Liebniz et en distribuant x^2 sur $(2x-1)$. Vérifier que le résultat est le même dans les deux cas.

Question 14
Trouver la dérivée des fonctions suivantes en utilisant la règle de dérivation d'un produit et simplifier le résultat obtenu.

a) $y = (2x-1)(5x+1)$
b) $y = (3x+1)\left(2-5x^3\right)$
c) $x = \left(\sqrt{t}-t\right)\left(4t^3-2t^2+5\right)$
d) $y = x(3x-1)-(2x-5)\left(4-3x^2\right)$
e) $f(x) = (x+1)(2x+1)(3x+1)$
f) $f(x) = x^3\left(5x^2-4\right)\left(3-x^4\right)$

Question 15
Trouver la dérivée des fonctions suivantes en utilisant la règle de dérivation d'un quotient et simplifier le résultat obtenu.

a) $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$
b) $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$
c) $y = \dfrac{2x^4}{x^4+1}$
d) $d(t) = \dfrac{4t^2-5}{5-4t^3}$
e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1-x}$
f) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$

Question 16
Donner la dérivée de chacune des fonctions au point indiqué.

a) $f(x) = \dfrac{-x^2+6x+2}{2-3x}$ au point $(0,1)$.
b) $y = \left(t^2-3t-2\right)\left(\sqrt{t}+2t\right)$ au point $(1,-12)$.
c) $f(x) = \dfrac{1}{x^7-1} - \dfrac{1}{9-x^2}$ au point $(-1,-\frac{5}{8})$.

Question 17
Calculer la dérivée des fonctions suivantes **sans utiliser la règle du quotient**.

a) $f(x) = \dfrac{x^3-3x+1}{\pi}$
b) $f(x) = \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{6x^3}$
c) $f(x) = \dfrac{57x^5}{10}$
d) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{64x^2}}{48}$

Question 18
Soient u, v et w des fonctions dérivables de x. Montrer que

$$(uvw)' = u'uv + uv'w + uvw'.$$

Question 19
Montrer qu'aucune droite de pente 1 n'est tangente à la courbe de la fonction

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}.$$

Question 20
La relation entre l'aire de la pupille d'un œil humain (en millimètres carrés) et l'intensité x d'une source lumineuse est donné par la fonction

$$A(x) = \frac{40+24x^4}{1+4x^4}.$$

Plus la source est intense, plus la pupille se contracte et son aire diminue. On définit la sensibilité de la pupille à une source lumineuse par la fonction $S(x) = \dfrac{dA}{dx}$.

a) Quelle est l'aire de la pupille lorsque l'intensité lumineuse est nulle ?
b) Quelle est l'aire d'une pupille soumise à une source lumineuse très intense ?
c) Quelle est la sensibilité de la pupille en fonction de l'intensité d'une source lumineuse ?

Question 21
Calculer la dérivée des fonctions suivantes en considérant $n \in \mathbb{N}$ comme une constante naturelle quelconque.

a) $y = \dfrac{1}{x^n}$
b) $y = x^{1/n}$
c) $y = \dfrac{x^n}{x^n-1}$
d) $y = \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x^2}$
e) $y = \dfrac{\sqrt{x}(10-x)}{x^3-8}$
f) $y = \dfrac{4x^3-x^2}{(x+1)\sqrt[4]{x}}$

Dérivée de fonctions composées

Question 22
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $f(t) = \left(3x^2-x+1\right)^5$
b) $f(t) = (2x+1)^{99}$
c) $g(t) = \left(1-5t^4\right)^{10}$
d) $y = \left(5x^2-3x+2\right)^{\frac{7}{2}}$
e) $f(x) = \sqrt{x^5+1}$
f) $g(x) = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^3$
g) $x(t) = \sqrt{\dfrac{mt}{1+t}}$
h) $f(x) = 5\sqrt[3]{8-x}$

Question 23
Soit $y=\sqrt{x}$, $x=6t^2-5t$ et $z=\frac{1}{y}$. Calculer les dérivées suivantes.

a) $\dfrac{dx}{dt}$ et $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=2}$

b) $\dfrac{dz}{dy}$ et $\left.\dfrac{dz}{dy}\right|_{y=-3}$

c) $\dfrac{dy}{dt}$ et $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=-1}$

d) $\dfrac{dz}{dx}$ et $\left.\dfrac{dz}{dx}\right|_{x=\frac{1}{9}}$

Question 24
Calculer la dérivée des fonctions suivantes **sans utiliser la règle du quotient**.

a) $y=\dfrac{-17}{3\,(x^2-x+6)}$

b) $y=\dfrac{4}{\sqrt[3]{x^2+4x+2}}$

Question 25
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $y=\left[\left(x^3+2x\right)^4+3x\right]^5$

b) $y=(3x+4)^{14}\left(x^2-2\right)^{18}$

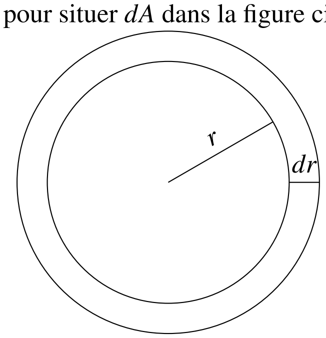
c) $f(t)\;=\;\sqrt{(2t+\pi)^3(2-5t)}$

d) $y=\dfrac{\left(2x^3+1\right)^3}{\sqrt{x+3}}$

e) $f(x)=\sqrt{x^2+\sqrt{3x+1}}$

Question 26 (exploration)
L'aire un cercle est relié au rayon par la relation $A=\pi r^2$.

a) Déterminer $\dfrac{dA}{dr}$.
b) Déduisez du résultat obtenu une relation entre dA et dr. Utiliser ce résultat pour situer dA dans la figure ci dessous.



Question 27
On a observé que la masse m (en kilogrammes) d'un poisson d'une certaine espèce dépend de sa longueur L (en mètres) par la fonction $m=4L^2$. Supposons que le taux de croissance de la longueur par rapport au temps (en années) est de $(0,3-0,2L)$ m/an.

a) Trouver l'expression de $\dfrac{dm}{dt}$ en fonction de L. Indiquer les unités.
b) Évaluer $\left.\dfrac{dm}{dt}\right|_{m=4}$ et interpréter le résultat obtenu dans le contexte donné.

Dérivation implicite

Question 28
Déterminer, parmi les équations suivantes, celles qui définissent implicitement une fonction (mais pas explicitement).

(a) $y=\dfrac{3t+1}{4t}$

(b) $y=\dfrac{3y+1}{4x}$

(c) $x^2+5x+6=y$

(d) $xy^2+5y^2=3x+y$

Question 29
Calculer les dérivées implicites suivantes.

a) $\dfrac{dy}{dx}$ si $x+y^2=1$.

b) $\dfrac{dy}{dx}$ si $x^3+y^3=1$.

c) $\dfrac{dy}{dx}$ si $xy=1$.

d) $\dfrac{dx}{dt}$ si $\sqrt{x^2+t^2}=2t^2+4$.

e) $\dfrac{dx}{dy}$ si $x^3-4y^3=5x^2+6y^3$.

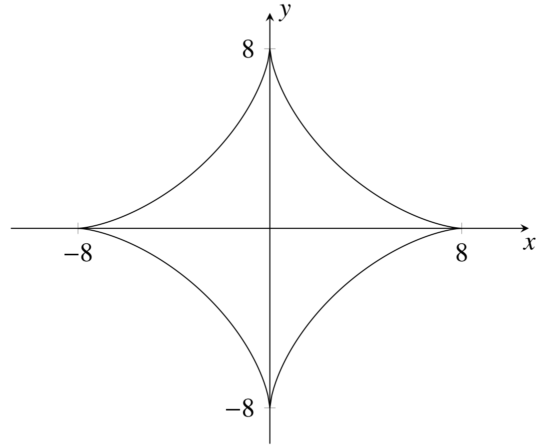
f) $\dfrac{dy}{dx}$ si $x=\dfrac{3y-y^2}{2y+3}$.

g) $\dfrac{dy}{dx}$ si $x^2y^2+x^3y=6x$.

Question 30
Déterminer l'équation de la droite tangente à la courbe décrite par l'équation $x^3+y^3=2xy$ au point $(1,1)$.

Question 31
Soit le cercle d'équation $x^2+y^2=r^2$ (cercle de rayon r centré à l'origine). Montrer que la droite passant par l'origine et un point (x_0,y_0) situé sur la circonférence du cercle est toujours perpendiculaire à la droite tangente au cercle en ce point (x_0,y_0).

Question 32
Trouver la pente de la droite tangente à l'astéroïde $x^{2/3}+y^{2/3}=4$, illustrée ci-dessous, au point $\left(1,-3\sqrt{3}\right)$.



Dérivée d'ordre supérieur

Question 33
Calculer les dérivées suivantes.

a) $f^{(4)}(x)$, si $f(x) = x^5 + 7x$.
b) y''', si $y = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.
c) $y^{(4)}$, si $y = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.
d) $y^{(10)}$, si $y = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.
e) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, si $y = \left(x^3 + 1\right)^5$.
f) $f''(1)$, si $f(x) = \frac{4x^5-2x}{x^3}$.
g) $\left.\dfrac{d^3y}{dx^3}\right|_{x=4}$, si $y = \sqrt{x^7} - 3x$.
h) $f^{(5)}(x)$, si $f(x) = \dfrac{1}{x^5}$.

Question 34
Si $y = P(x)$ est une fonction polynômiale définie par un polynôme de degré k, pour quelle valeur de n a-t-on $y^{(n)} = 0$?

Question 35
On lance verticalement vers le haut un objet. La hauteur (en mètres) de l'objet t secondes après avoir été lancé est donnée par la fonction $h(t) = 50 + 15t - 4,9t^2$.

a) À quelle hauteur l'objet se trouve-t-il au moment où il est lancé ?
b) Quelle est la vitesse initiale de l'objet ?
c) Quelle est la vitesse de l'objet lorsqu'il atteint la hauteur de 60 m lors de sa montée ?
d) Sachant qu'il commencera à descendre au moment où sa vitesse est nulle, quelle est la hauteur maximale atteinte par l'objet ?
e) À quelle vitesse l'objet touchera-t-il le sol ?
f) Trouver l'accélération de cet objet au temps t.

Exercices récapitulatifs

Question 36
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $f(x) = x^6$
b) $f(x) = \dfrac{-2}{\sqrt[3]{x}}$
c) $f(x) = \sqrt{x^3}$
d) $y = 8x^3 - 4x^2 + 9x - 1$
e) $f(x) = -4x^8 + \dfrac{x^{-2}}{5} - \dfrac{4}{3}$
f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{3} - x^4 - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$
g) $y = \dfrac{7}{4x^{3/4}} - \dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 4^4$
h) $y = \dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{6}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{\sqrt[5]{x}}{8}$
i) $f(x) = (3x-1)(4-x^3)$
j) $y = \left(\sqrt{x} + x\right)\left(2x - 5x^3 + 9\right)$
k) $f(x) = x^2\left(5x^2 - 1\right)\left(5 - 7x^3\right)$
l) $y = x(3x-2) - (5x-3)(6-2x)$
m) $f(x) = \dfrac{3x}{x-1}$
n) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 6}{x}$
o) $f(x) = \dfrac{4x^2 - 5}{6 - 2x^4}$
p) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2-x}$
q) $f(x) = \dfrac{x}{x+2} + \dfrac{x+2}{x^2}$
r) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}(6-x)}{x^2-4}$

Question 37
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^3 + 2}$
b) $y = \left(x^3 - 1\right)^7$
c) $y = x^2 + \sqrt{3x-1}$
d) $y = x^2\sqrt{3x-1}$
e) $y = \dfrac{\sqrt{x} + 1}{x}$
f) $y = (2-x)^5(7x+3)$
g) $y = 5\sqrt[3]{2x^2 + 5x + 7}$
h) $y = 7\left(\dfrac{x^2+4}{x^2-4}\right)$

Question 38
La droite $y = 4x - 17$ est-elle tangente à la courbe de $f(x) = x^2 - 2x - 8$? Si oui, déterminer le point de tangence.

Question 39
Soit la fonction $f(x) = (4x-9)^2 + 3$. Déterminer la ou les valeurs de a telles que la droite tangente à la courbe de f en $x = a$ et les axes forment un triangle isocèle.

Question 40
Lors d'un test de collision, une voiture se déplace en ligne droite vers un mur situé à 90 m du point de départ de la voiture. La position s de la voiture (en mètres) à partir de son point de départ t secondes après son départ est donnée par $s(t) = 4t + \dfrac{t^2}{2}$.

a) À quelle distance du mur la voiture se trouve-t-elle 2 s après son départ ?
b) Quelle est sa vitesse 2 s après son départ ?
c) À quelle distance du mur la voiture se trouve-t-elle lorsque sa vitesse est de 30 km/h ?

d) Combien de temps lui faut-il avant d'entrer en collision avec le mur ?

e) Quelle est sa vitesse lors de l'impact ?

f) Quelle est son accélération au moment de l'impact ?

Question 41

Supposons que durant les deux premières années de sa vie, la masse (en kilogrammes) d'un bébé en fonction du temps t (en mois) écoulé depuis sa naissance est donnée par la fonction $m(t) = \sqrt{12+7t}$.

a) Quelle est la masse du bébé à sa naissance ?

b) Évaluer l'expression $\dfrac{m(8)-m(5)}{3}$ et en donner un interprétation.

c) Quelle fonction donne le taux de croissance instantané de la masse du bébé ?

d) Quel est le taux de croissance instantané de la masse du bébé lorsque celui-ci est âgé de 9 mois ? Interpréter.

e) Le bébé grossit-il plus rapidement à 3 mois ou à 9 mois ?

Question 42

Calculer $\dfrac{dy}{dx}$ pour chacune des équations suivantes.

a) $2x^2+3xy-y^2 = 1$

b) $\dfrac{1}{x}-3xy = \dfrac{1}{y}$

c) $3x^2y^3+5x = 3-5y^3$

d) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{x-y}{x+y}$

Question 43

Pour chacune des équations suivantes, calculer la pente de la tangente à la courbe au point donné.

a) $4x^2+9y^2 = 40$ au point $(-1,-2)$

b) $x^2y^2(1+xy)+4 = 0$ au point $(1,-2)$

Question 44

En utilisant la formule de la dérivée d'un produit de deux fonctions, montrer que

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(f(x))^2}.$$

Question 45

Supposons que u et v sont toutes deux des fonctions de x.

a) Montrer que $(uv)'' = u''v+2u'v'+uv''$.

b) Trouver une formule pour $(uv)'''$.

c) En généralisant, faire une conjecture donnant une formule pour la dérivée 6^e d'un produit uv.

Question 46

Trouver la valeur que l'on doit donner à la constante k pour que la courbe d'équation $y = -x^2+kx$ soit tangente à la droite $y = x+4$. (Indice : faire un dessin de la situation pour déterminer sous quelles conditions ce qui est demandé est possible.)

Question 47

Démontrer que $(x^n)' = nx^{x-1}$ en utilisant la formule généralisée du produit de n fonctions :

$$(u_1\cdots u_n)' = u_1'u_2\cdots u_n + u_1u_2'u_3\cdots u_n + \cdots + u_1\cdots u_{n-1}u_n'.$$

Question 48

Nous avons montré en classe que $(x^n)' = nx^{n-1}$ était valide lorsque n est un entier naturel.

a) En utilisant la formule de la dérivée du quotient, montrer que cette formule est valide lorsque n est négatif (donc si $n = -k$ avec k positif.)

b) En utilisant la dérivée implicite, montrer que cette formule est valide lorsque n est une fraction du type $\frac{1}{k}$, avec k naturel.

c) Montrer ensuite à l'aide de la dérivée d'une fonction composée que la formule est valide lorsque n est une fraction $\frac{a}{b}$.

Solutions

Question 1

$$\left(\frac{x^2}{2}+2x^5\right)' = \left(\frac{1}{2}\left(x^2\right)'+\left(2x^5\right)'\right) \qquad (D4)$$
$$= \frac{1}{2}\left(x^2\right)'+2\left(x^5\right)' \qquad (D3)$$
$$= \frac{1}{2}\left(2x\right)+2\left(5x^4\right) \qquad (D1)$$
$$= x+10x^4.$$

Question 2

a) $\frac{dy}{dx} = 9x^8$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{-12}{x^{13}}$

c) $f'(x) = \frac{7}{4}x^{\frac{3}{4}}$

d) $y' = \frac{-3}{x^4}$

e) $\frac{dy}{dx} = \frac{-6}{x^7}$

f) $f'(x) = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$

g) $g'(t) = \frac{-1}{2\sqrt{t^3}}$

h) $\frac{du}{dx} = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$

i) $f'(x) = \frac{-1}{3\sqrt[3]{x^4}}$

j) $x'(t) = \frac{3}{7}\frac{-5}{3}t^{-8/3} = \frac{-5}{7\sqrt[3]{t^8}}$

Question 3

a) $f'(x) = 0$

b) $v'(t) = 1$

c) $h'(x) = 15x^2$

d) $x'(t) = \frac{3}{4}$

e) $\frac{dy}{dx} = \frac{9}{20\sqrt[4]{x^5}}$

f) $x'(r) = -\frac{5}{8r^2}$

g) $f'(x) = 24x^2-8x+9$

h) $\frac{dy}{dx} = \frac{-8}{3\sqrt[3]{x^5}} - 35x^6 - \frac{1}{2x^4}$

i) $f'(x) = 12x^2+2x-12$

j) $\frac{dy}{dx} = -30x^2\left(2-x^3\right)$

k) $f'(x) = 81x^2+54x+9$

l) $g'(t) = -12t^2-12-\frac{24}{t^3}$

Question 4

a) 3

b) -4

c) $\frac{14}{15}$

d) $\frac{3k^2}{2}-2$

Question 5

a) $y = -4x-4$

b) $y = 3x-2$

c) $y = -x+2$

d) $y = -\frac{x}{9}+\frac{2}{3}$

e) $y = -\frac{x}{2}+\sqrt{2}$

f) $y = \frac{x}{2}+\frac{1}{2}$

g) $y = \frac{x}{4}+1$

Question 6

a) On cherche quand $f'(x) = 0$. On trouve $x = \frac{2}{3}$

b) $f'(x) = 0$ si $x = 1$

c) $f'(x) = 0$ si $x = 1$ ou $x = -1$

d) $f'(x) = 0$ si $x = -2$ et $x = 1$

e) $f'(x) = 0$ si $x = -1$ et $x = 1$

f) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3} = -\frac{x+2}{x^3}$. $f'(x) = 0$ si $x = -2$

Question 7

La fonction dérivée est

$$f'(x) = \frac{x}{2}-3.$$

Si la tangente est horizontale au maximum, elle doit être de pente 0. On doit donc avoir que $f'(x) = 0$, c'est-à-dire que

$$\frac{x}{2}-3 = 0.$$

En isolant x, on trouve que $x = 6$.

Question 8

$x = -2$

Question 9

$x = -\frac{2}{3}$ et $x = \frac{2}{3}$

Question 10

a) $f(x) \approx 9+6(x-3)$

$$f(3.1) \approx 9+6(3.1-3) = 9+0.6 = 9.6$$

b) $f(x) \approx 1+3(x-1)$

$$f(0.9) \approx 1+3(0.9-1) = 1-0.3 = 0.7$$

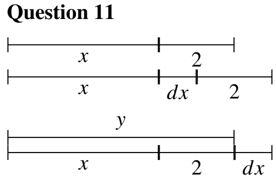
c) $f(x) \approx \frac{1}{10}-\frac{1}{100}(x-10)$;

$$f(11) \approx \frac{1}{10}-\frac{1}{100}(11-10) = \frac{1}{10}-\frac{1}{100} = \frac{9}{100} = 0.09$$

d) $f(x) \approx 2+\frac{1}{4}(x-4)$;

$$f(4.1) \approx 2+\frac{1}{4}(4.1-4) = 2+\frac{0.1}{4} = 2.025$$

Question 11



Question 12

Considérez l'équation $y = ax+b$ d'une droite de paramètres indéterminés a et b. et trouver les valeurs des paramètres nécessaires pour que la droite passe par le point $(4,20)$ et un point de la courbe $y = 8x-x^2$.

Chercher ce qui doit se produire au point de tangence pour que la droite soit tangente à la courbe. (La pente de la tangente est donnée est la valeur de la dérivée au point de tangence !)

Les équations des deux droites sont $y = 4x+4$ et $y = -4x+36$.

Question 13

La dérivée est $6x^2-2x$.

Question 14

a) $\frac{dy}{dx} = (2)(5x+1)+(2x-1)(5) = 20x-3$

b) $\frac{dy}{dx} = (3)(2-5x^3)+(3x+1)(-15x^2)$
$= -60x^3-15x^2+6$

c) $x'(t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}-1\right)\left(4t^3-2t^2+5\right)+\left(\sqrt{t}-t\right)\left(12t^2-4t\right)$
$= 14\sqrt{t^5}-5\sqrt{t^3}+\frac{5}{2\sqrt{t}}-16t^3+6t^2-5$

d) $\frac{dy}{dx} = (1)(3x-1)+x(3)+(2)(4-3x^2)+(2x-5)(-6x)$
$= 18x^2-24x-9$

e) $f'(x) = (2x+1)(3x+1)+(x+1)(2)(3x+1)+$
$(x+1)(2x+1)(3)$
$= 18x^2+22x+6$

f) $f'(x) = 3x^2\left(5x^2-4\right)\left(3-x^4\right)+$
$x^3(10x)\left(3-x^4\right)+x^3\left(5x^2-4\right)\left(-4x^3\right)$
$= -45x^8+28x^6+75x^4-36x^2$

Question 15

a) $y' = \frac{2x(x^2+1)-x^2(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$.

b) $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$.

c) $\frac{dy}{dx} = \frac{8x^3}{(x^4+1)^2}$.

d) $d'(t) = \frac{4t\left(4t^3-15t+10\right)}{\left(5-4t^3\right)^2}$.

e) $f'(x) = \frac{1+x}{2\sqrt{x}(1-x)^2}$.

f) $f'(x) = \frac{x-1}{2\sqrt{x^3}}$.

Question 16

a) $f'(0) = \dfrac{9}{2}$

b) $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=1} = -13$

c) $f'(-1) = -\dfrac{110}{64}$

Question 17

a) $f'(x) = \dfrac{3x^2-3}{\pi}$

b) $f'(x) = \dfrac{3x^2}{6} - \dfrac{1}{2} + x^2$

c) $f'(x) = \dfrac{57x^4}{2}$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{18\sqrt[3]{x}}$

Question 18

$$\begin{aligned}(uvw)' &= ((uv)w)' \\ &= (uv)'w + (uv)w' \\ &= (u'v+uv')w + (uv)w' \\ &= u'vw + uv'w + uvw'\end{aligned}$$

Question 19

Il faut montrer que la dérivée de f est différente de 1 pour toute valeur de x. On cherche donc à montrer que

$$f'(x) = 1$$

n'a aucune solution. On trouve en dérivant que $f'(x) = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$. L'équation à résoudre est donc

$$\frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 1.$$

$$\begin{aligned}x(x-2) &= (x-1)^2 \\ x^2-2x &= x^2-2x+1 \\ 0 &= 1\end{aligned}$$

qui n'a pas de solution. Il n'y a donc aucune valeur de x telle que la pente de la tangente $f'(x)$ soit 1.

Question 20

a) 40mm^2

b) 6 mm^2

c) $S(x) = -\dfrac{544x^3}{(1-4x^4)^2}$

Question 21

a) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{nx^{(n-1)/(n)}}$

c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-nx^{n-1}}{(x^n-1)^2}$

d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{x+2}{x^3} = -\dfrac{2x^2+5x-2}{x^3(x+1)^2}$

e) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^4-50x^3+24x-80}{2\sqrt{x}(x^3-8)^2}$

f) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt[4]{x^3}\left(28x^2+41x-7\right)}{4(x+1)^2}$

Question 22

a) $f'(t) = 5\left(3x^2-x+1\right)^4(6x-1)$

b) $f'(t) = 99(2x+1)^{98}(2) = 198(2x+1)^{98}$

c) $g'(t) = -200t^3\left(1-5t^4\right)^9$

d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{7}{2}\left(5x^2-3x+2\right)^{\frac{5}{2}}(10x-3)$

e) $f'(x) = \dfrac{5x^4}{2\sqrt{x^5+1}}$

f) $g'(x) = -\dfrac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}$

g) $x'(t) = \dfrac{m}{2(1+t)^2}\sqrt{\dfrac{1+t}{mt}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{m}{t(1+t)^3}}$

h) $f'(x) = \dfrac{-5}{3\sqrt[3]{(8-x)^2}}$

Question 23

a) $\dfrac{dx}{dt} = 12t-5$ et $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=2} = 19$

b) $\dfrac{dz}{dy} = -\dfrac{1}{y^2}$ et $\left.\dfrac{dz}{dy}\right|_{y=-3} = -\dfrac{1}{9}$

c) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{12t-5}{2\sqrt{6t^2-5t}}$ et $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=-1} = -\dfrac{17}{2\sqrt{11}}$

d) $\dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$ et $\left.\dfrac{dz}{dx}\right|_{x=\frac{1}{9}} = -\dfrac{27}{2}$

Question 24

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{34x-17}{3(x^2-x+6)^2}$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-8(x+2)}{3\sqrt[3]{(x^2+4x+2)^4}}$

Question 25

a) $\dfrac{dy}{dx} = 5\left[\left(x^3+2x\right)^4+3x\right]^4\left(4\left(x^3+2x\right)^3\left(3x^2+2\right)+3\right)$

b) $\dfrac{dy}{dx} = 6(3x+4)^{13}\left(x^2-2\right)^{17}\left(25x^2+24x-14\right)$

c) $f'(t) = \left(6-20t-\dfrac{5\pi}{2}\right)\sqrt{\dfrac{2t+\pi}{2-5t}}$

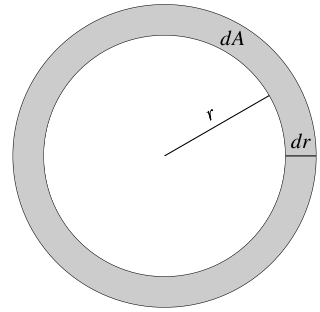
d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\left(2x^3+1\right)^2\left(34x^3+108x^2-1\right)}{2\sqrt{(x+3)^3}}$

e) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+\sqrt{3x+1}}}\left(2x+\dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}}\right)$

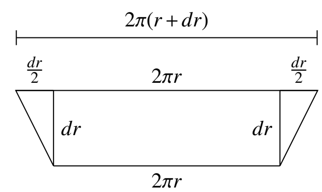
Question 26

a) $\dfrac{dA}{dr} = 2\pi r$

b) $dA = 2\pi r\,dr$. L'aire dA est la variation de l'aire quand le rayon va de r à $r+dr$. C'est celle de la bande circulaire de largeur dr dans la figure ci dessous.



Si on « déplie » la bande circulaire, on obtient un trapèze dont la petite base est de longueur $2\pi r$ (la circonférence du cercle intérieur) et la grande base est de longueur $2\pi(r+dr)$ (la circonférence du cercle extérieur, de rayon $r+dr$).



Les petits triangles à chaque bout du trapèze on une aire de $dr^2/4$, que l'on peut négliger si dr est très petit. L'aire dA est donc approximativement l'aire du rectangle central, qui est

$$dA = 2\pi r\,dr.$$

Question 27

a) $\dfrac{dm}{dt} = \dfrac{dm}{dL}\dfrac{dL}{dt} = 8L(0,3-0,2L)$

b) Au moment où la masse du poisson est de 4 kg, celle-ci augmente à un taux de 0,8 kg/an.

Question 28

(b) et (d)

Question 29

a) $-\frac{1}{2y}$

b) $-\frac{x^2}{y^2}$

c) $-\frac{y}{x}$

d) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{4t\sqrt{x^2+t^2}-t}{x}$

e) $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{30y^2}{3x^2-10x}$

f) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(2y+3)^2}{9-6y-2y^2}$ ou $\dfrac{2y+3}{3-2x-2y}$

g) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6-2xy^2-3x^2y}{2x^2y+x^3}$

Question 30

$y = -x+2$

Question 31

Laissé à l'étudiant. Utiliser le fait que le produit des pentes doit être de -1.

Question 32

$\sqrt{3}$

Question 33

a) $f^{(4)}(x) = 120x$

b) $y''' = 4\cdot 3\cdot 2x + 3\cdot 2\cdot 1 = 24x + 6$

c) $y^{(4)} = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$

d) $y^{(10)} = 0$

e) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 30x\left(x^3+1\right)^3\left(7x^3+1\right)$

f) $f''(1) = -4$

g) $\left.\dfrac{d^3y}{dx^3}\right|_{x=4} = \dfrac{105}{4}$

h) $f^{(5)}(x) = -\dfrac{15120}{x^{10}}$

Question 34

$n = k+1.$

Question 35

a) 50 m

b) 15 m/s

c) $\sqrt{29}$ m/s $\approx 5,39$ m/s

d) 61,48 m

e) environ 34,71 m/s

f) $h''(t) = -9.8$ m/s²

Question 36

a) $f'(x) = 6x^5$

b) $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^4}}$

c) $f'(x) = \dfrac{3\sqrt{x}}{2}$

d) $y' = 24x^2 - 8x + 9$

e) $f'(x) = -32x^7 - \dfrac{2}{5x^3}$

f) $f'(x) = \dfrac{1}{6\sqrt{x}} - 4x^3 + \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$

g) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-21}{16x^{\frac{7}{4}}} - x^{\frac{3}{2}}$

h) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{\sqrt{x^3}} - \dfrac{2}{\sqrt[3]{x^4}} + \dfrac{1}{40\sqrt[5]{x^4}}$

i) $f'(x) = 3(-4x^3 + x^2 + 4)$

j) $y' = -20x^3 - \dfrac{35\sqrt{x^5}}{2} + 4x + 3\sqrt{x} + \dfrac{9}{2\sqrt{x}} + 9$

k) $f'(x) = -5x(49x^5 - 7x^3 - 20x^2 + 2)$

l) $y' = 2(13x - 19)$

m) $f'(x) = \dfrac{-3}{(x-1)^2}$

n) $f'(x) = \dfrac{-6}{x^2} + 2x - 1$

o) $f'(x) = \dfrac{2x(2x^4 - 5x^2 + 6}{(x^4-3)^2}$

p) $f'(x) = \dfrac{x+2}{2\sqrt{x}(x-2)^2}$

q) $f'(x) = \dfrac{x^3 - 8x^2 - 20x - 16}{x^3(x+2)^2}$

r) $f'(x) = \dfrac{x^3 - 18x^2 + 12x - 24}{2\sqrt{x}(x^2-4)^2}$

Question 37

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4x - 2}{(x^3+2)^2}$

b) $\dfrac{dy}{dx} = 21x^2\left(x^3-1\right)^6$

c) $\dfrac{dy}{dx} = 2x + \dfrac{3}{2\sqrt{3x-1}}$

d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{15x^2 - 4x}{2\sqrt{3x-1}}$

e) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\sqrt{x}+2}{2x^2}$

f) $\dfrac{dy}{dx} = (2-x)^4(-42x-1)$

g) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{20x+25}{3\sqrt[3]{(2x^2+5x+7)^2}}$

h) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-112x}{(x^2-4)^2}$

Question 38

Oui, au point $(3,-5)$.

Question 39

$a = \dfrac{71}{32}$ ou $a = \dfrac{73}{32}$.

Question 40

a) 80 m

b) 6 m/s (21,6 km/h)

c) 43,27 m

d) 10 s

e) 14 m/s (50,4 km/h)

f) 1 m/s² (12,96 km/h²)

Question 41

a) $\sqrt{12}$ kg

b) Entre l'âge de 5 mois et 8 mois, la masse de ce bébé a augmenté à un taux moyen de $\frac{\sqrt{68}-\sqrt{47}}{3}$ kg/mois $\approx= 0,4635$ kg/mois.

c) $m'(t) = \dfrac{7}{2\sqrt{12+7t}}$.

d) À l'âge d'exactement 9 mois, le bébé grossit à un taux de

$$m'(9) = \frac{7}{2\sqrt{75}} \text{ kg/mois.}$$

e) Le bébé grossi plus rapidement à 3 mois, car $\text{TVI}_3(m) > \text{TVI}_9(m)$.

Question 42

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x+3y}{2y-3x}$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 + 3x^2y^3}{x^2 - 3x^3y^2}$ ou $\dfrac{1+6xy^2}{1-6x^2y}$

c) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{6x^3+5}{15y^2 + 9x^2y^2}$

d) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$

Question 43

a) pente :$-\dfrac{2}{9}$

b) pente :2

Question 44

Laissé à l'étudiant. Indice : transformer le quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ en produit $f(x)\dfrac{1}{g(x)}$.

Question 45

a) Dériver deux fois à l'aide de la formule du produit.

b) Dériver le résultat précédant à l'aide de la formule du produit.

c) Si vous n'y arrivez pas facilement, commencer par calculer $\dfrac{d^4}{dx^4}(uv)$.

Question 46

$k = -3$ ou $k = 5$

Question 47

Laissé à l'étudiant. Une preuve rigoureuse nécessiterait l'utilisation du principe d'induction, mais vous pouvez trouver l'idée générale sans utiliser ce principe.

Question 48

a) Laissé à l'étudiant.

b) Laissé à l'étudiant.

c) Laissé à l'étudiant.