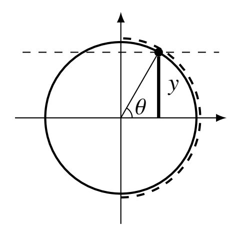
9.6 Rappel sur les fonctions trigonométriques inverses

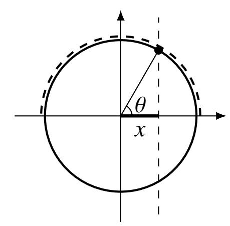
Les fonctions trigonométriques inverses sont les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques. Pour que ces fonctions soient définies, il faut restreindre leur domaine aux valeurs obtenue en appliquant les fonctions trigonométriques correspondantes. Par exemple, comme $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, la fonction $\arcsin(x)$ ne peut pas être définie pour des valeurs hors de l'intervalle $[-1, 1]$. De plus, si on connait la valeur d'une fonction trigonométrique, il y a deux angle différent qui correspondent à cette valeur. Pour que la fonction trigonométrique inverse soit une fonction, il faut choisir un seul de ces angles. Dans les définitions qui suivent, le choix de cet angles est toujours fait dans la partie du cercle trigonométrique indiquée en « traitillés ».

Définition 9.3.

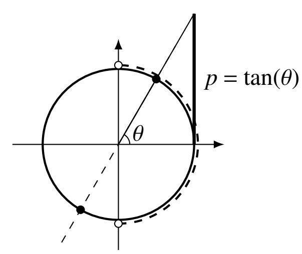
a) $\arcsin(y) = \theta \iff \sin(\theta) = y$, avec $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, $-1 \leq y \leq 1$



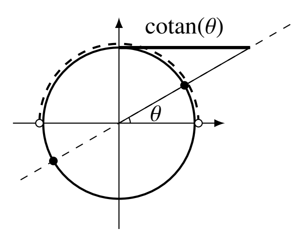
b) $\arccos(x) = \theta \iff \cos(\theta) = x$, avec $0 \leq \theta \leq \pi$ et $-1 \leq x \leq 1$



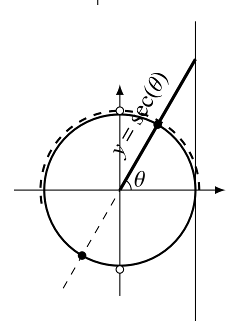
c) $\arctan(p) = \theta \iff \tan(\theta) = p$, avec $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ et $p \in \mathbb{R}$



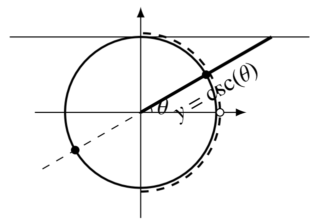
d) $\operatorname{arcctg}(q) = \theta \iff \operatorname{cotan}(\theta) = q$, avec $0 < \theta < \pi$ et $q \in \mathbb{R}$



e) $\operatorname{arcsec}(y) = \theta \iff \sec(\theta) = y$, avec $0 \leq \theta \leq \pi$, $\theta \neq \pi/2$ et $y \geq 1$ ou $y \leq -1$.



f) $\operatorname{arccosec}(x) = \theta \iff \csc(\theta) = x$, avec $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, $\theta \neq 0$

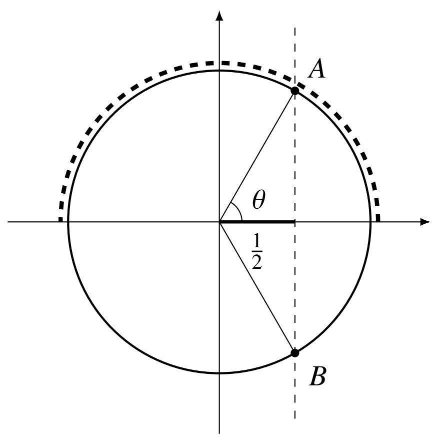


Exemple 9.8. Déteminer $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$.

Par définition

$$\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \theta \iff \cos(\theta) = \frac{1}{2}$$

Comme $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$, la coordonnée en x du point $P(\theta)$ doit être $\frac{1}{2}$. On se trouve donc dans la situation suivante : il y a deux angles $-\pi \leq \theta \leq \pi$ satisfaisant cette relation, angle correspodant aux points A et B de la figure suivante.



Comme l'angle θ correspondant au point B n'est pas la valeur principale conventionnelle pour arccos, la solution est l'angle correspondant au point A. Comme le côté de longueur $\frac{1}{2}$ correspond au côté d'un des triangles remarquables, ont doit avoir $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Proposition 9.6.

$$\sin(\arcsin(y)) = y$$
$$\cos(\arccos(x)) = x$$
$$\tan(\arctan(p)) = p$$
$$\vdots$$

Si θ est la valeur principale des fonction trigonométriques inverses impliquée, alors

$$\arcsin(\sin(\theta)) = \theta$$
$$\arccos(\cos(\theta)) = \theta$$
$$\arctan(\tan(\theta)) = \theta$$
$$\vdots$$

Remarque 9.2. Ne pas confondre les fonction trigonométriques inverses et les inverses de ces fonctions ! Par exemple,

$$\arcsin(x) \neq \frac{1}{\sin(x)} = \csc(x).$$

Cette confusion est fréquente pour deux raisons :

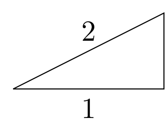
1. l'expression « fonction inverse » est synonyme de « fonction réciproque ». En général, la fonction réciproque de la fonction $f(x)$ n'est pas $\frac{1}{f(x)}$.
2. l'utilisation de la notation $\sin^{-1}(x)$, notamment sur certaines calculatrices, peut laisser penser que

$$\sin^{-1}(x) = \frac{1}{\sin(x)} \qquad \text{(Faux !)}$$

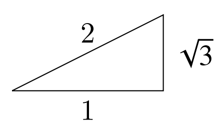
mais ce n'est pas le cas. Cette notation est utilisée pour dénoter « la fonction réciproque de $\sin$ » qui est $\arcsin$ et non pas « l'inverse de $\sin(x)$ qui est $\frac{1}{\sin(x)}$.

Exemple 9.9. Sachant que $\theta = \arccos(1/2)$, trouver les autres rapports trigonométrique.

Solution : comme $\cos(\theta)$ doit être $1/2$, on peut supposer que θ est un angle dans le triangle suivant (car les valeurs des fonctions trigonométriques restent les même si on change l'échelle d'un triangle.)



Comme le triangle est rectangle, on peut trouver la mesure du côté manquant à l'aide du théorème de Pythagore.



À l'aide de ce triangle, on trouve les valeurs des autres fonction trigonométriques :

- $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$
- $\tan(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$
- $\sec(\theta) = \frac{2}{1} = 2$
- $\csc(\theta) = \frac{2}{\sqrt{3}}$
- $\cot(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

9.7 Dérivation des fonctions trigonométriques inverses

Proposition 9.7. Dérivée des fonctions trigonométriques inverses.

(1) $\left(\arcsin(x)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(2) $\left(\arccos(x)\right)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

(3) $\left(\arctan(x)\right)' = \frac{1}{x^2+1}$

(4) $\left(\text{arcctg}(x)\right)' = \frac{-1}{x^2+1}$

(5) $\left(\text{asec}(x)\right)' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

(6) $\left(\text{arccosec}(x)\right)' = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Démonstration.

Toutes ces preuves se font en utilisant la dérivation implicite et des identités trigonométriques et la proposition 9.6. On suppose que x est dans le domaine des fonctions impliquées.

On utilise aussi les identités de Pythagore suivantes :

$$\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1 \qquad \sec^2(x) = \tan^2(x)+1 \qquad \csc^2(x) = \text{cotan}^2(x)+1.$$

Preuve de $\left(\arcsin(x)\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$:

$$\begin{aligned}
\sin(\arcsin(x)) &= x \\
\left(\sin(\arcsin(x))\right)' &= (x)' \\
\cos(\arcsin(x))\left(\arcsin(x)\right)' &= 1 \\
\left(\arcsin(x)\right)' &= \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} \\
\left(\arcsin(x)\right)' &= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} \\
\left(\arcsin(x)\right)' &= \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\arcsin(x)))^2}} \\
\left(\arcsin(x)\right)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

Preuve de $\left(\arctan(x)\right)' = \dfrac{1}{x^2+1}$:

$$
\begin{aligned}
\tan(\arctan(x)) &= x \\
\Big(\tan(\arctan(x))\Big)' &= (x)' \\
\sec^2(\arctan(x))\Big(\operatorname{asec}(x)\Big)' &= 1 \\
\Big(\arctan(x)\Big)' &= \frac{1}{\sec^2(\arctan(x))} \\
\Big(\arctan(x)\Big)' &= \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} \\
\Big(\arctan(x)\Big)' &= \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}
$$

Preuve de $\Big(\operatorname{asec}(x)\Big)' = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$:

$$
\begin{aligned}
\sec(\operatorname{asec}(x)) &= x \\
\Big(\sec(\operatorname{asec}(x))\Big)' &= (x)' \\
\sec(\operatorname{asec}(x))\tan(\operatorname{asec}(x))\Big(\operatorname{asec}(x)\Big)' &= 1 \\
\Big(\operatorname{asec}(x)\Big)' &= \frac{1}{\sec(\operatorname{asec}(x))\tan(\operatorname{asec}(x))} \\
\Big(\operatorname{asec}(x)\Big)' &= \frac{1}{x\sqrt{\sec^2(\operatorname{asec}(x))-1}} \\
\Big(\operatorname{asec}(x)\Big)' &= \frac{1}{x\sqrt{x^2-1)}}
\end{aligned}
$$

Les autres preuves sont laissées en exercice. On utilise la dérivation implicite et les identités de Pythagore de manière similaire aux trois preuves données. □

Exemple 9.10.

$$
\begin{aligned}
\Big(\arcsin(2x)\Big)' &= \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2)}}\Big(2x\Big)' \\
&= \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}
\end{aligned}
$$

Exemple 9.11.

$$\begin{aligned}\left(\arccos\left(x^3\right)\right)' &= \frac{-1}{\sqrt{1-(x^3)^2}}\left(x^3\right)' \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1-(x^3)^2}}3x^2 \\ &= -\frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}\end{aligned}$$

Exemple 9.12.

$$\begin{aligned}\left(\arctan(\sin(x))\right)' &= \frac{1}{\sin^2(x)+1}\left(\sin(x)\right)' \\ &= \frac{1}{\sin^2(x)+1}\cos(x) \\ &= \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)+1}\end{aligned}$$

Exemple 9.13.

$$\left(\arctan(x)^{13}\right)' = 13\arctan(x)^{12}\frac{1}{x^2+1} = \frac{13\arctan(x)^{12}}{x^2+1}$$

Note : $\arctan(x)^{13} = \left(\arctan(x)\right)^{13}$ et non $\arctan(x^{13})$.

Exemple 9.14.

$$\left(\operatorname{arcsec}(x/2)\right)' = \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2-1}} = \frac{2}{x\sqrt{\frac{x^2}{2}-1}} = \frac{8}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Exemple 9.15.

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{\arctan(x)}\right)' &= \frac{1}{2\sqrt{\arctan(x)}}\left(\arctan(x)\right)' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\arctan(x)}}\frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

Exemple 9.16. Trouvons les extrémums de $f(x) = \arctan(x^3-12x)$.

La dérivée de f est

$$f'(x) = \frac{1}{(x^3-12x)^2+1}(3x^2-12) = \frac{3(x^2-4)}{(x^3-12x)^2+1} = \frac{3(x-2)(x+2)}{(x^3-12x)^2+1}.$$

La dérivée s'annule quand $x = 2$ ou $x = -2$. Le numérateur $(x^3 - 12x)^2 + 1$ étant toujours plus grand que 1, il ne s'annule jamais,

Les valeurs critiques sont donc 2 et -2.

On peut faire un tableau de signe de la dérivée

x		-2		2	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	MAX	$\searrow$	MIN	$\nearrow$

On conclue donc que f a un maximum en $x = -2$ et un minimum en $x = 2$.

Note : on choisit ici de faire un tableau de signe plutôt que d'utiliser le test de la dérivée seconde, car la simplification de dérivée seconde plus complexe que la détermination des signes de la dérivée !

9.8 Applications diverses de la dérivée des fonctions trigonométrique inverses

Exemple 9.17. Analyser la fonction $f(x) = \arcsin(x)$.

La dérivée première est

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

La dérivée seconde est

$$f''(x) = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

Valeurs critiques de f' : $f'(x)$ non défini pour $x \geq 1$ ou $x \leq -1$. $f'(x)$ n'est jamais nul (car la fonction racine carrée, si elle est définie, donne toujours un résultat positif.)

Comme il y a division par 0 possible dans la dérivée en $x = \pm 1$, on vérifie si la dérivée tend vers $\pm\infty$ pour déterminer s'il y a un tangente verticale.

$$\lim_{x \to -1^+} f'(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

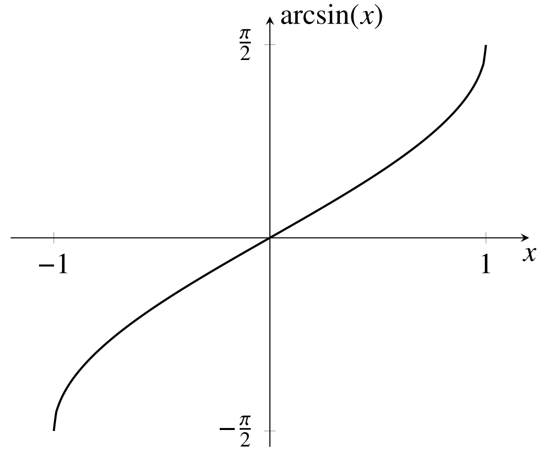
Valeurs critiques de f'' :

$f''(x) = 0$ si $x = 0$. $f''(x)$ est non-défini pour $x \geq 1$ ou $x \leq -1$.

Tableau de variation :

x	-1		0		1
$f'(x)$	∞	+	+	+	∞
$f''(x)$	$\nexists$	-	0	+	$\nexists$
$f(x)$	TV	$\curvearrowright$	INF	$\curvearrowleft$	TV

Graphe de la fonction $f(x) = \arcsin(x)$.


arcsin(x)
π/2
−1
1
x
−π/2