Chapitre 3

Propriétés de la dérivée

Le calcul de la fonction dérivée à l'aide de la définition donnée au chapitre précédent est laborieuse, même pour des fonctions définies par des expressions algébriques simples. Heureusement, il est possible « d'algébriser » le calcul de la dérivée, c'est-à-dire d'identifier des propriétés qui permettent de calculer directement à partir de définition algébrique de la fonction à dériver et sans utiliser la définition. On démontrera dans ce chapitre un certain nombre de propriétés de la dérivée qui, prise ensemble, permettent de déterminer la dérivée d'une fonction en appliquant des « formules de dérivation » (ou « règles de dérivation »).

Ces propriétés ont été découvertes au fil du temps par plusieurs mathématiciens qui travaillaient sur différents problèmes allant du calcul d'aires délimitées par des courbes algébriques à la détermination de minimums et maximums liés à des problèmes de géométrie. C'est à Newton et Leibniz que l'on doit d'avoir su les présenter de manière systématique pour la première fois et d'avoir établit le lien entre le calcul d'aire et la dérivée.

Dans ce qui suit, nous chercherons à établir un certain nombre de propriétés algébriques de la dérivée qui peuvent servir à la détermination des fonctions dérivées sans utiliser la définition donnée au dernier chapitre, mais plutôt en la calculant directement à partir de l'expression algébrique définissant la fonction à dériver.

3.1 Preuves graphiques

Pour simplifier, nous utiliserons parfois des preuves graphiques comme démonstration de certaines propriétés de la dérivée. Pour donner un avant-goût de ce genre d'argument, voici une preuve algébrique et une preuve graphique du fait que la dérivée de la fonction $y = x^2$ est $y' = 2x$.

Proposition 3.1.

$$\frac{d(x^2)}{dx} = 2x.$$

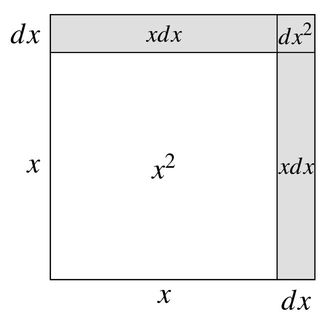
preuve algébrique.

$$\begin{aligned}
\frac{d\left(x^2\right)}{dx} &= \frac{(x+dx)^2 - x^2}{dx} \\
&= \frac{(x^2+2xdx+dx^2)-x^2}{dx} \\
&= \frac{2xdx+dx^2}{dx} \\
&= \frac{dx(2x+dx)}{dx} \\
&= 2x+dx \\
&\approx 2x \qquad \text{car } dx^2 \text{ très petit quand } dx \text{ est petit}
\end{aligned}$$

□

On peut généralement obtenir géométriquement l'expression de dy à partir de relations géométriques. Cette manière de faire est fréquente en physique. Elle permet aussi de mieux comprendre pourquoi certaines quantités peuvent être négligées.

preuve géométrique. La différentielle dy est l'aire de la région en gris dans le graphique suivant : c'est l'écart entre un carré de côté x et un carré de côté $x+dx$. Quand dx est très petit, l'aide du petit carré dx^2 est négligée.



On peut voir dans ce graphique que

$$dy = xdx + xdx + dx^2 \approx 2x\,dx.$$

Ainsi,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x\,dx}{dx} = 2x.$$

□

Proposition 3.2. La dérivée de la fonction racine carrée est

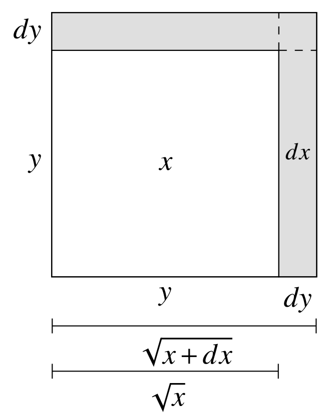
$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\frac{d\left(\sqrt{x}\right)}{dx} &= \frac{\sqrt{x+dx}-\sqrt{x}}{dx}\\
&= \frac{\sqrt{x+dx}-\sqrt{x}}{dx}\,\frac{\sqrt{x+dx}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+dx}+\sqrt{x}}\\
&= \frac{(x+dx)-x}{dx(\sqrt{x+dx}+\sqrt{x})}\\
&= \frac{1}{\sqrt{x+dx}+\sqrt{x}}\\
&\approx \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

car $\sqrt{x+dx} \approx \sqrt{x}$ si dx très petit.

Preuve graphique. si x est l'aire d'un carré, alors le côté est $y = \sqrt{x}$. Si l'aire du carré change de x à $x+dx$ (donc varie de la partie en gris dx), alors la variation approximative dy du côté du carré est approximativement $dy = \sqrt{x+dx} - \sqrt{x}$.



D'après la figure, l'aire dx (en gris) peut s'écrire comme

$$dx = ydy + ydy + dy^2.$$

Si on néglige dy^2 qui est très petit par rapport à dy, on trouve

$$dx = 2ydy,$$

donc, en isolant,

$$dy = \frac{1}{2y}dx.$$

Enfin, comme $y = \sqrt{x}$, on doit avoir que

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx. \qquad \square$$

Proposition 3.3. Si $y = \frac{1}{x}$, alors

$$dy = -\frac{1}{x^2}dx.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{1}{x+dx} - \frac{1}{x}}{dx} \\
&= \frac{\frac{x-(x+dx)}{x(x+dx)}}{dx} \\
&= \frac{\frac{-1}{x^2+xdx}dx}{dx} \\
&= \frac{-1}{x^2 + xdx} \\
&\approx \frac{-1}{x^2} \qquad \text{car } x^2 + x\,dx \approx x^2.
\end{aligned}$$

□

3.2 Linéarité et dérivée de puissances

Pour alléger, à partir de ce point nous utiliserons souvent la notation « $(y)'$ » pour désigner la dérivée de y. Par exemple, on écrit directement

$$\left(x^2\right)' = 2x$$

plutôt que

$$y = x^2 \qquad \frac{dy}{dx} = 2x.$$

Comme une fonction constante a comme graphe une droite de pente 0, la tangente à cette droite en n'importe quel point est aussi une droite de pente nulle.

Proposition 3.4 (Dérivée d'une constante)**.** Si $y = C$, où C est une constante réelle quelconque, alors

$$\frac{d(C)}{dx} = 0$$

Exemple 3.1.

$$(2)' = 0 \qquad (-3)' = 0 \qquad (0)' = 0 \qquad (\pi)' = 0$$

Démonstration. Comme $y = f(x) = C$ peut importe la valeur de x, on a que

$$\begin{aligned}
\frac{d(C)}{dx} &= \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} \\
&= \frac{C - C}{dx} \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

De manière similaire au cas où y est une fonction constante, la dérivée de $y = x$ coïncide avec l'intuition : $y = x$ est une droite de pente 1, donc toute tangente à cette droite doit être de pente 1.

Proposition 3.5. Si $y = x$, alors

$$\frac{dy}{dx} = 1$$

Démonstration.
$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+dx)-x}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1$$
□

Proposition 3.6 (linéarité 1 – dérivée d'un multiple d'une fonction)**.** Si $y = Cu$, où $u = f(x)$ est une fonction de x, alors

$$\frac{d}{dx}\left(Cu\right) = C\frac{du}{dx}$$

Exemple 3.2.

$$\left(3x^5\right)' = 3\left(x^5\right)' \qquad \left(\frac{x^3}{5}\right)' = \frac{1}{5}\left(x^3\right)' \qquad \left(10\sin(x)\right)' = 10\left(\sin(x)\right)'.$$

Démonstration. Preuve algébrique directe : si $u = f(x)$, alors $du = f(x+dx) - f(x)$, donc, comme $f(x) = u$, on a que

$$u + du = f(x+dx)$$

et donc
$$C(u+du) = Cf(x+dx)$$

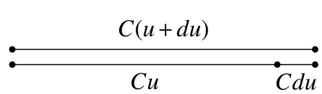
La différentielle $d(Cu)$ peut se calculer comme

$$d(Cu) = Cf(x+dx) - Cf(x) = C(u+du) - Cu.$$

On a donc que

$$\begin{aligned}\frac{d(Cu)}{dx} &= \frac{C(u+du)-Cu}{dx}\\ &= \frac{Cu + Cdu - Cu}{dx}\\ &= \frac{Cdu}{dx}\\ &= C\frac{du}{dx}\end{aligned}$$

Preuve graphique :



□

Proposition 3.7 (Linéarité 2 : additivité)**.** Si u et v sont toutes deux des fonctions d'une même variable, alors

$$\frac{d\big(u+v\big)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

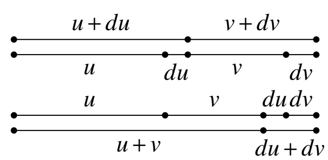
Démonstration.

$$\begin{aligned}\frac{d\big(u+v\big)}{dx} &= \frac{\big((u+du)+(v+dv)\big)-(u+v)}{dx}\\ &= \frac{du+dv}{dx}\\ &= \frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}\end{aligned}$$

Ainsi, on a que

$$\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

Preuve graphique :



□

Note : les deux dernières propriétés considérées ensemble forment une propriété appelée *linéarité* de la dérivée. Les limites et plusieurs autres constructions mathématiques étudiées au collégial on cette propriété de « linéarité », qui est le sujet d'étude central du cours d'algèbre *linéaire*.

Exemple 3.3.

$$\big(-x^2+3x\big)' = \big(-x^2\big)' + \big(3x\big)' \qquad \big(x^2-3x\big)' = \big(x^2+(-3x)\big)' = \big(x^2\big)' + \big(-3x\big)'$$

Proposition 3.8 (Puissances)**.** Si $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\frac{d\big(x^n\big)}{dx} = nx^{n-1}.$$

Exemple 3.4.

$$\big(x^3\big)' = 3x^2 \quad \big(x^{10}\big)' = 10x^9 \quad \big(x^{743}\big)' = 743x^{742} \quad (x^1)' = 1\cdot x^0 = 1 \quad (1)' = (x^0)' = 0\cdot x^{-1} = 0.$$

Démonstration. Pour cette preuve, nous utiliserons le triangle de Pascal pour développer $(x+dx)^n$. Ce développement débute ainsi :

$$(x+dx)^n = x^n + nx^{n-1}\,dx + (\text{ termes où } dx \text{ apparait avec un exposant} \geq 2).$$

Notons qu'on peut mettre dx en évidence d'une somme dont les termes tous un facteur dx^2. On trouve ainsi la dérive directement à partir de la définition :

$$\begin{aligned}
\frac{d\left(x^n\right)}{dx} &= \frac{(x+dx)^n - x^n}{dx} \\
&= \frac{\left(x^n + nx^{n-1}\,dx + (\text{termes})\,dx^2\right) - x^n}{dx} \\
&= \frac{nx^{n-1}\,dx + (\text{termes})\,dx^2}{dx} \\
&= \frac{\left(nx^{n-1} + (\text{termes})\,dx\right)dx}{dx} \\
&= nx^{n-1} + (\text{termes}\,dx) \\
&\approx nx^{n-1}.
\end{aligned}$$

□

Exemple 3.5. À l'aide des propriétés précédentes, on peut déterminer la dérivée d'une fonction polynômiale quelconque. Par exemple

$$\begin{aligned}
\left(3x^2 - 2x + 4\right)' &= (3x^2)' - (2x)' + (4)' \\
&= 3(x^2)' - 3(x)' + (4)' \\
&= 3(x^2)' - 3(x)' + (4)' \\
&= 3(2x^1) - 3(1) + (0) \\
&= 6x - 3
\end{aligned}$$

Par la suite, nous ne donnerons pas autant de détails pour la dérivée des polynômes. La plupart du temps, nous donnerons directement le résultat.

3.3 Dérivée d'un produit et d'un quotient

Proposition 3.9 (Dérivée d'un produit, formule de Leibniz)**.** Si u et v sont toutes deux des fonctions de x, alors sous forme différentielle

$$d\left(uv\right) = v\,du + u\,dv.$$

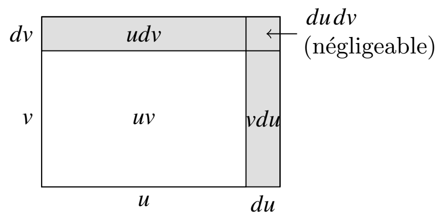
Le taux de variation instantané est donc

$$\frac{d\left(uv\right)}{dx} = \frac{v\,du + u\,dv}{dx}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\frac{d\big(uv\big)}{dx} &= \frac{\big((u+du)(v+dv)\big)-(uv)}{dx}\\
&= \frac{\big(uv+vdu+udv+dudv\big)-uv}{dx}\\
&= \frac{vdu+udv+dudv}{dx}\\
&\approx \frac{vdu+udv}{dx} \qquad \text{car } dudv \text{ est très petit quand } du \text{ et } dv \text{ sont petits}\\
&= v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}
\end{aligned}$$

Preuve graphique :



La région en gris est $d(uv)$, la variation de uv quand u varie de du et v varie de dv. Selon le graphique, on a que

$$d(uv) = udv + vdu + dudv,$$

ce qui est approximativement

$$d(uv) \approx udv + vdu$$

car le produit $dudv$ est très petit par rapport à du et dv. □

Exemple 3.6. En utilisant la formule de Liebniz 3.9, on trouve que

$$\begin{aligned}
\big((x^4+1)(x^6+1)\big)' &= (x^4+1)'(x^6+1)+(x^4+1)(x^6+1)'\\
&= (4x^3)(x^6+1)+(x^4+1)(6x^5)\\
&= (4x^9+4x^3)+(6x^9+6x^5)\\
&= 10x^9+6x^5+4x^3
\end{aligned}$$

Proposition 3.10 (Dérivée d'un quotient)**.** Si u et v sont toutes deux des fonctions de x, alors, partout où $\frac{1}{v}$ est définie :

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Sous forme de taux de variation instantané

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

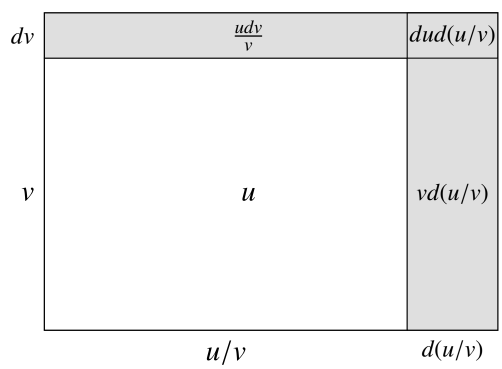
Démonstration. On utilise directement avec la définition $dy = f(x+dx) - f(x)$. La fonction à dériver est $f(x) = \frac{u}{v}$. Si x varie de dx, alors u et v varient respectivement de du et dv pour devenir $u+du$ et $v+dv$.

$$\begin{aligned}
d\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{u+du}{v+dv} - \frac{u}{v} \\
&= \frac{v(u+du) - u(v+dv)}{v(v+dv)} \\
&= \frac{(vu+v\,du) - (uv+u\,dv)}{v^2+vdv} \\
&= \frac{vu+v\,du-uv-u\,dv}{v^2+vdv} \\
&= \frac{v\,du-u\,dv}{v^2+vdv} \\
&\approx \frac{v\,du-u\,dv}{v^2}
\end{aligned}$$

On peut diviser par dx pour obtenir le résultat voulu :

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{vdu-udv}{v^2dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

Preuve graphique



$$du \approx \frac{udv}{v} + vd(u/v)$$

$$vd(u/v) = \frac{udv}{v} - du$$

$$d(u/v) = \frac{udv-vdu}{v^2}$$

On divise enfin par dx comme dans l'argument algébrique. □

Exemple 3.7. En utilisant la propriété 3.10 permettant de calculer la dérivée d'un quotient, on trouve que

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^4+1}{x^6++1}\right)' &= \frac{(x^4+1)'(x^6+1)-(x^4+1)(x^6+1)'}{(x^6+1)^2}\\ &= \frac{4x^3(x^6+1)-(x^4+1)(6x^5)}{(x^6+1)^2}\\ &= \frac{(4x^9+4x^3)-(6x^9+6x^5)}{(x^6+1)^2}\\ &= \frac{-2x^9+6x^5+4x^3}{(x^6+1)^2}\end{aligned}$$

Proposition 3.11 (Inverse d'une puissance)**.**

$$\frac{d(x^{-n})}{dx} = -nx^{-n-1}$$

Démonstration. On détermine $\left(x^{-n}\right)'$ de deux manière différentes en utilisent l'identité algébrique et à l'aide de la formule pour la dérivée d'un produit.

$$x^n x^{-n} = 1.$$

En calculant la dérivée de chaque membre de cette égalité, on trouve que

$$\left(x^n x^{-n}\right)' = (1)' = 0$$

parce que $(C)' = 0$ pour n'importe quelle constante.

On peut aussi utiliser la formule donnant la dérivée d'un produit :

$$\begin{aligned}\left(x^n x^{-n}\right)' &= x^{-n}\left(x^n\right)' + x^n\left(x^{-n}\right)'\\ &= x^{-n}\left(nx^{n-1}\right)dx + x^n\left(x^{-n}\right)'.\end{aligned}$$

Comme on calcule la différentielle d'une même expression de deux manières différentes, les deux résultats doivent être égaux. On doit donc avoir que

$$x^{-n}nx^{n-1}dx + x^n\left(x^{-n}\right)' = 0$$

On isole $d\left(x^{-n}\right)'$ dans cette dernière égalité :

$$\left(x^{-n}\right)' = -n\frac{x^{-n}x^{n-1}}{x^n}dx$$

On trouve enfin, en simplifiant l'expression obtenue :

$$\left(x^{-n}\right)' = -nx^{-n-1}dx,$$

ce qui est le résultat désiré. □

Démonstration. Preuve à l'aide de la formule de dérivation d'un quotient.

$$\begin{aligned}\frac{d\left(\frac{1}{x^n}\right)}{dx} &= \frac{(1)'x^n - (1)(x^n)'}{(x^n)^2}\\ &= \frac{(0)x^n - nx^{n-1}}{x^{2n}}\\ &= \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}}\\ &= -nx^{(n-1)-2n}\\ &= -nx^{-n-1}\end{aligned}$$ □

Exemple 3.8.

$$\left(\frac{3}{x^5}\right)' = 3\left(x^{-5}\right)' = 3(-5)x^{-6} = -\frac{15}{x^6}$$

On peut remarquer que les formules trouvées dans les propositions 3.8, 3.11 et 3.2 sont toutes des cas particuliers d'un schéma plus général :

$$d\left(x^q\right) = rx^{q-1}$$

pour q un exposant rationnel quelconque.

Proposition 3.12. La formule

$$\frac{d\left(x^q\right)}{dx} = qx^{q-1}$$

est valable pour tout nombre rationnel q.

On verra plus loin que cette formule de dérivation est aussi valable pour n'importe quel exposant réel r.

3.3.1 Règle de chaine

Proposition 3.13. Si z est fonction de y fonction de x, alors le taux de variation total est le produit des taux de variations :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

Démonstration.

$$\frac{dz}{\cancel{dy}}\frac{\cancel{dy}}{dx} = \frac{dz}{dx}$$ □

Exemple 3.9. Soient $z = y^3$ et $y = \sqrt{x}$ deux fonctions. On aimerait connaitre le taux de variation de z par rapport à x. On utilise la règle de chaine. Noter que l'on veut le taux de variation en fonction de x. Il faut donc exprimer $\frac{dz}{dy}$ en fonction de

x en substituant $\sqrt{x}$ pour y.

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} &= \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} \\ &= (3y^2)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \\ &= \left(3\left(\sqrt{x}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \\ &= (3x)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \\ &= \frac{3x}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{3\sqrt{x}}{2}\end{aligned}$$

La règle de chaine peut aussi s'écrire avec la notation $f(x)$. La dérivée d'une fonction composée $f(g(x))$ est

$$\Big(f(g(x))\Big) = f'\Big(g(x)\Big)g'(x).$$

Voyons pourquoi cette forme de la règle de chaine n'est qu'une reformulation de 3.13. Si on pose que $z = f(g(x))$ et que $y = g(x)$, on a que $z = f(y)$. En appliquant la règle de chaine, on a que

$$\Big(f(g(x))\Big)' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

Comme $\frac{dy}{dx} = g'(x)$ et $\frac{dz}{dy} = f'(y)$, on doit avoir que

$$\Big(f(g(x))\Big)' = f'(y)g'(x)$$

Enfin, on substitute $y = g(x)$, dans cette dernière égalité pour exprimer la dérivée uniquement en fonction de x :

$$\Big(f(g(x))\Big) = f'(g(x))g'(x).$$

Exemple 3.10. Soit la fonction définie par $z = (2x-3)^8$. On peut voit cette fonction comme la composée de la fonction $f(y) = y^8$ et $g(x) = 2x - 3$. La dérivée de la composée de f et g est

$$\begin{aligned}\left(f(g(x))\right)' &= f'(g(x))g'(x)\\ &= f'(y)g'(x)\\ &= 8y^7(2x-3)'\\ &= 8(2x-3)^7(2)\\ &= 16(2x-3)^7\end{aligned}$$

Étant donné que la règle de chaine est très souvent utilisée, on ne fait habituellement pas autant d'étape dans le calcul d'une dérivé avec la règle de chaine. Le résultat d'un dérivée comme celle du dernier exemple se calcule directement sans étapes intermédiaire — après un entrainement suffisant !

La manière suivante d'écrire la règle de chaine permet de simplifier le calcul de la dérivée en pratique. Si $u = g(x)$, alors

$$\left(f(u)\right)' = f'(u)\,u'$$

Exemple 3.11.

$$\begin{aligned}\left((x^2+1)^5\right)' &= \left(u^5\right)' \qquad (\text{si } u = x^2+1)\\ &= 5u^4u'\\ &= 5(x^2+1)^4(x^2+1)'\\ &= 5(x^2+1)^4(2x)\\ &= 10x(x^2+1)^4\end{aligned}$$

En pratique, la variable intermédiaire u sera souvent choisie comme étant « main » au tableau ou « doigt » sur papier pour éviter d'écrire explicitement u à chaque dérivée.

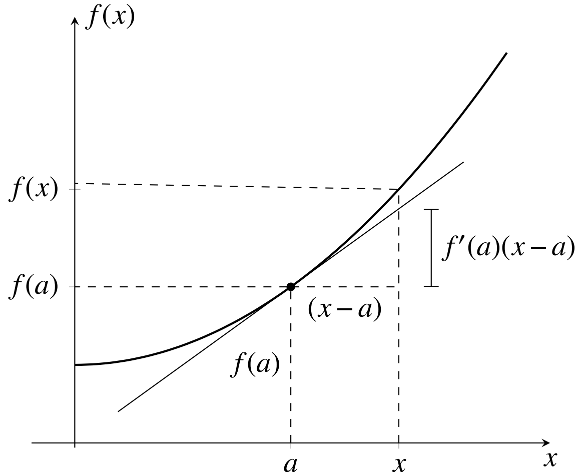
3.4 Linéarisation

Nous avons vu que la droite tangente à une fonction donnée est une bonne approximation de la fonction près du point de tangence. Pour une fonction f donnée, on appelle cette droite tangente la **linéarisation** de la fonction près de $x = a$.

Proposition 3.14. La linéarisation de f près de $x = a$ est la droite suivante

$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$

Démonstration. On voit dans le graphique suivant que la coordonnée en y de $f(x)$ est $f(a)$ plus (approximativement) $f'(a)(x-a)$.



La longueur $f'(a)(x-a)$ est l'accroissement Δy le long de la droite tangente quand $\Delta x = x-a$, sachant que par définition de la dérivée, la pende droite tangente en $x = a$ est

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a)$$

Ainsi, on peut approximer la fonction f près de $x = a$ par

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a). \qquad \square$$

Exemple 3.12. Approximons la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ par sa droite tangente en $x = 4$. La dérivée est

$$f(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{1/2}\right) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

La fonction est donc approximée par sa droite tangente en $x = 2$ qui a pour équation

$$\begin{aligned} y &= f(4) + f'(4)(x-4) \\ &= \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(x-4) \\ &= 2 + \frac{1}{4}(x-4) \end{aligned}$$

On peut se servir de cette approximation pour déterminer approximativement $\sqrt{2.1}$. En approximant par la droite tangente en $x = 4$, on a que

$$\sqrt{x} \approx 2 + \frac{1}{4}(x-4).$$

Pour $x = 4.1$ on trouve

$$\sqrt{4.1} \approx 2 + \frac{1}{4}(4.1-4) = 2 + (0.25)(0.1) = 2.025.$$

Ainsi, $\sqrt{4.1} \approx 2.025$. Cette valeur est proche de la valeur approximative donnée par une calculatrice : $\sqrt{4.1} \approx 2.02484567313166$.

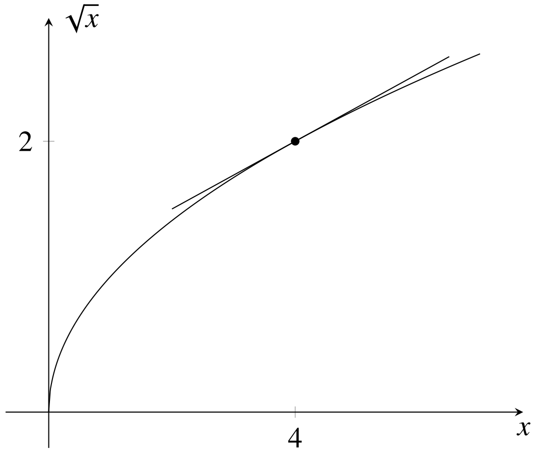
Si on prend une valeur moins près de $a = 4$, l'approximation est moins bonne. Par exemple, si $x = 5$ l'approximation par la droite tangente en $x = 4$ donne

$$\sqrt{5} \approx 2 + \frac{1}{4}(5-4) = 2 + (0.25)(1) = 2.25,$$

alors qu'une meilleure approximation donnée par un logiciel ou une calculatrice est

$$\sqrt{5} \approx 2.23606797749979.$$

On peut comprendre pourquoi en examinant le graphe suivant représentant le graphe de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ et celui de la droite tangente en $x = 4$ dont l'équation est $y = 2 + \frac{1}{4}(x-4)$



Plus x est loin de $x = 4$, plus l'écart entre la droite tangente et le graphe est grand, ce qui explique pourquoi l'écart trouvé est plus grand en $x = 5$ qu'en $x = 4.1$.

3.5 Dérivation implicite

Il est possible de définir une fonction par une équation. Par exemple :

$$y = \frac{1}{x} \qquad y = x^2$$

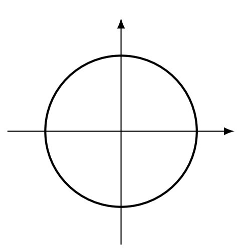
On pourrait aussi définir ces fonctions par les équations suivantes

$$xy = 1 \qquad x^2 - y = 0.$$

Dans une telle définition implicite, il faut cependant spécifier quelle variable est fonction de l'autre. Par habitude, nous prenons souvent y comme fonction de x.

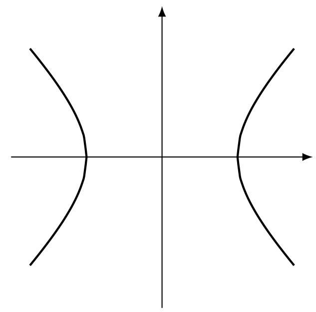
Nous savons cependant qu'une équation ne peut pas toujours être vue comme une définition implicite d'une fonction. Par exemple l'équation du cercle de rayon 1

$x^2 + y^2 = 1$



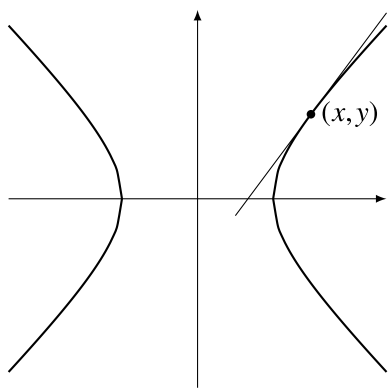
ou encore celle d'une hyperbole

$x^2 - y^2 = 1$



Même si ces équations établissent des relations entre les variables x et y sans que ces relations soient des fonctions, il est possible de déterminer la pente des tangentes à ces courbes à l'aide de la dérivée en supposant qu'il est possible *localement* de supposer que ces courbes sont le graphe d'une fonction définie implicitement.

Exemple 3.13. Prenons l'hyperbole définie par l'équation $x^2 - y^2 = 1$. On veut connaitre la pente de la tangente au point (x, y).



On suppose que « localement » y est une fonction de x, que l'on pourrait écrire comme $y = f(x)$.

Comme le point (x, y) est sur la courbe, on doit avoir que

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Si on considère chaque membre de cette égalité comme une fonction, on peut les dériver et ont obtient le même résultat :

$$\left(x^2 - y^2\right)' = \left(1\right)'.$$

$$2x - 2yy' = 0.$$

Notez le « y' » : c'est la « dérivée de l'intérieur » dans l'application de la règle de chaine. En effet, on pourrait écrire y^2 comme $(f(x))^2$ puisque $y = f(x)$. En dérivant sous cette forme avec la règle de chaine on obtient

$$\left((f(x))^2\right)' = 2f(x)f'(x).$$

Comme $2f(x)f'(x) = 2yy'$, on voit que la dérivée de y^2 *par rapport à x* est bien $2yy'$.

Enfin, on isole y' dans l'égalité $2x-2yy'=0$ pour obtenir une expression donnant la pente de la tangente en fonction des coordonnées x et y du point (x,y) :

$$y' = \frac{-2x}{-2y} = \frac{x}{y}$$

On peut utiliser ce résultat pour déterminer la pente de la tangente au point $(2, \sqrt{3})$. On vérifie que ce point est bien sur l'hyperbole :

$$2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 4-3 = 1.$$

(Si le point n'était pas sur l'hyperbole, l'hypothèse de départ de ce calcul serait fausse et la conclusion $y' = \frac{x}{y}$ le serait aussi !)

La pente de la tangente au point donné est donc

$$y' = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

On peut utiliser la dérivation implicite dans les preuves de certaines propositions — cela arrivera dans la suite du cours. Voyons un exemple typique.

Proposition 3.15.

$$\left(x^{1/n}\right)' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Démonstration. On a la relation suivante :

$$\left(x^{1/n}\right)^n = x.$$

Si on dérive chaque membre de cette égalité, on a

$$\left(\left(x^{1/n}\right)^n\right)' = (x)',$$

c'est-à-dire, en utilisant la règle de chaine :

$$n\left(x^{1/n}\right)^{n-1}\left(x^{1/n}\right)' = 1.$$

On isole la dérivée recherchée :

$$\left(x^{1/n}\right)' = \frac{1}{n\left(x^{1/n}\right)^{n-1}}.$$

On simplifiant le membre de droite, on trouve la formule désirée :

$$\left(x^{1/n}\right)' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.$$

□

3.5.1 Taux liés

La règle de chaine permet l'étude de taux de variation de variables liées entre elles par une relation, comme dans la section précédente.

Exemple 3.14. Imaginons un cercle dont le rayon r varie dans le temps. Si le rayon varie, l'aide du cercle doit varier elle aussi car les deux quantités sont reliés par l'équation

$$A = \pi r^2.$$

On a donc une situation où l'aire A est fonction du rayon r, lui-même fonction du temps. Pour connaitre le taux de variation de l'aire en fonction du temps, on utilise la règle de chaine :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr}\frac{dr}{dt}$$
$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

Si le taux de variation du rayon $\frac{dr}{dt}$ est de 55 cm/s et que le rayon du cercle est de 10 cm, le taux de variation de l'aire est

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r|_{r=10\,\text{cm}}(5\,\text{cm/s}) = 2\pi(10\,\text{cm})(5\,\text{cm/s}) = 100\pi\,\text{cm}^2/\text{s} \approx 314.16\,\text{cm}^2/\text{s}.$$

Notons que pour le taux de variation du rayon $\frac{dr}{dt}$ est de 55 cm/s et que le rayon du cercle est différent, par exemple de 100 cm, le taux de variation de l'aire est

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r|_{r=100\,\text{cm}}(5\,\text{cm/s}) = 2\pi(100\,\text{cm})(5\,\text{cm/s}) = 1000\pi\,\text{cm}^2/\text{s} \approx 3141.59\,\text{cm}^2/\text{s}$$

On voit que le taux de variation de l'aire dépend du rayon du cercle. On explique cela géométriquement par le fait que pour un petit cercle, un accroissement de son rayon de 5 cm aura un grand effet sur l'aire, alors que pour un grand cercle, un même accroissement du rayon aura peu d'effet sur l'aire.

3.6 Dérivée d'ordre supérieur

Le « taux de changements du taux de changement » est une autre quantité importante pouvant nous donner de l'information sur le comportement d'une fonction. En dynamique, elle correspond à l'**accélération**, qui est le taux de changement de la vitesse, elle même le taux de changement de la position.

Comme le taux de changement d'une fonction un point de son graphe est donnée par la dérivée de la fonction, le taux de changement du taux de changement est donnée par la *dérivée de la dérivée*. On peut voir la dérivée d'une fonction comme une nouvelle fonction, que l'on peut dériver elle aussi.

Par exemple, si on prend $f(x) = x^3$, le taux de changement est donnée par $f'(x) = 3x^2$. Le taux de changement de f' est donc donné par la **dérivée seconde** $f''(x) = 6x$.

Définition 3.1. On appelle **dérivée seconde** d'une fonction la dérivée de sa dérivée

$$f''(x) \stackrel{\text{def}}{=} (f'(x))'.$$

On défini de manière similaire la **dérivée troisième** $f'''(x) = \left(f''(x)\right)'$, la **dérivée quatrième** $f''''(x) = \left(f'''(x)\right)'$, etc.

On appelle ces dérivées les **dérivées d'ordre supérieur**.

Exemple 3.15. Calculer la dérivée troisième de $f(x) = \sqrt{x}$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x} \\
f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
f''(x) &= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{2}\left(x^{-1/2}\right)' = -\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)x^{-3/2} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \\
f'''(x) &= \left(-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}\right)' = -\frac{1}{4}\left(x^{-3/2}\right)' = -\frac{1}{4}\left(\frac{-3}{2}\right)x^{-5/2} = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}
\end{aligned}
$$

Comme on peut répéter la dérivation autant de fois que l'on veut, l'accumulation de « ' » peut alourdir la notation. Il est plus pratique d'avoir une notation qui indique plus simplement le nombre de fois qu'une fonction est dérivée.

Définition 3.2.

$$
\begin{aligned}
\text{Dérivée première :} \quad & f^{(1)}(x) \overset{\text{def}}{=} f'(x) \\
\text{Dérivée seconde :} \quad & f^{(2)}(x) \overset{\text{def}}{=} f''(x) = (f'(x))' \\
\text{Dérivée troisième :} \quad & f^{(3)}(x) \overset{\text{def}}{=} f'''(x) = \left(f^{(2)}(x)\right)' \\
\text{Dérivée quatrième :} \quad & f^{(4)}(x) \overset{\text{def}}{=} f''''(x) = \left(f^{(3)}(x)\right)' \\
\text{Dérivée cinquième :} \quad & f^{(5)}(x) \overset{\text{def}}{=} \left(f^{(4)}(x)\right)' \\
& \vdots \\
\text{Dérivée } n\text{-ième :} \quad & f^{(n)}(x) \overset{\text{def}}{=} \left(f^{(n-1)}(x)\right)'
\end{aligned}
$$

La dérivée d'ordre quelconque $f^{(n)}$ est appelée **dérivée n-ième**.Par convention, la « dérivée 0-ieme » est la fonction elle même : $f^{(0)}(x) \overset{\text{def}}{=} f(x)$.

Les dérivées d'ordre supérieur ont une notation dans toute les variantes de la notation pour la dérivée. Le tableau suivant offre un panorama de ces notations.

Notations pour la dérivée seconde						
$f''(x)$	$f^{(2)}(x)$	y''	$\left(x^2\right)''$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	$\frac{d^2f(x)}{dx^2}$	$\frac{d^2x^2}{dx^2}$
$f''(a)$	$f^{(2)}(a)$	$y''\vert_{x=a}$	$\left(x^2\right)''\Big\vert_{x=a}$	$\frac{d^2y}{dx^2}\Big\vert_{x=a}$	$\frac{d^2f(x)}{dx^2}\Big\vert_{x=a}$	$\frac{d^2x^2}{dx^2}\Big\vert_{x=a}$