Chapitre 5

Limites et dérivées

5.1 Taux de variation instantané avec les limites

Définition 5.1. Le **taux de variation instantané** (TVI) de la fonction f en $x = a$ est défini par

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = \lim_{\Delta x \to 0} \left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{x=a} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

On remplace donc l'idée d'un « dx infinitésimal » par l'idée plus précise de limite quand $\Delta x \to 0$. Cette idée permet d'éviter les complications conceptuelles de l'idée de dx infiniment petit. Avec les limites, on parle d'une quantité « aussi petite que l'on veut » plutôt que d'une quantité « infiniment petite ».

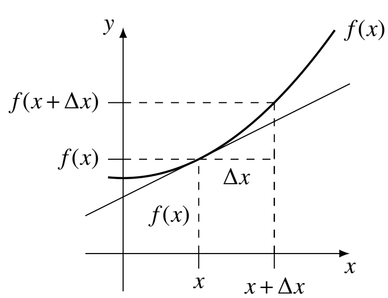
Note : quand on évalue le taux de variation instantanné à l'aide de cette définition, la limite impliquée sera toujours un cas d'indétermination « $\frac{0}{0}$ », car $\Delta y \to 0$ quand $\Delta x \to 0$. Il faut donc toujours utiliser une transformation algébrique permettant de simplifier un facteur Δx pour lever l'indétermination.

5.2 Dérivée

Comme la pente de la tangente à au graphe d'une fonction f est directement lié à sa croissance, il est utile de la considérer comme une nouvelle fonction *dérivée* de la fonction initiale. Cette fonction dérivée associe à chaque valeur de x dans le domaine de f la pente de la tangente au graphe de f au point $\big(x, f(x)\big)$.

Définition 5.2. La **fonction dérivée** f' d'une fonction f est définie par

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$



Exemple 5.1. Si $f(x) = x^3$, alors

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3) - x^3}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2 \\
&= 3x^2 + 3x(0) + (0)^2 \\
&= 3x^2
\end{aligned}$$

On a donc que $f'(x) = 3x^2$.

À l'aide de la dérivée, on peut par exemple déterminer la pente de la tangente à f en un point quelconque $(x, f(x))$ du graphe de f en évaluant $f'(x)$. Par exemple, si $x = 2$, la pente de la tangente est

$$f'(2) = 3(2)^2 = 24.$$

Si $x = -1$, la pente de la tangente est

$$f'(-1) = 3(-1)^2 = 3.$$

On peut aussi chercher les valeurs de x où la pente a une valeur spécifique. Par exemple, la tangente est horizontale quand sa pente est nulle. Cela est le cas quand

$$f'(x) = 0 \iff 3x^2 = 0 \iff x = 0.$$

Exemple 5.2. Si $f(x) = \sqrt{x+1}$, la dérivée de f est

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x+1}-\sqrt{x+1}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x+1}-\sqrt{x+1}}{\Delta x}\frac{\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+\Delta x+1}-\sqrt{x+1}} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x+\Delta x+1)-(x+1)}{\Delta x}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1}} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1}} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x+0+1}+\sqrt{x+1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x+1}}
\end{aligned}$$

Donc $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$.

La fonction dérivée f' est la fonction qui associe à chaque valeur de x le taux de variation instantané de f en x, soit la pente de la tangente en $\big(x, f(x)\big)$:

$$f'(x) = \mathrm{TVI}_x(f) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

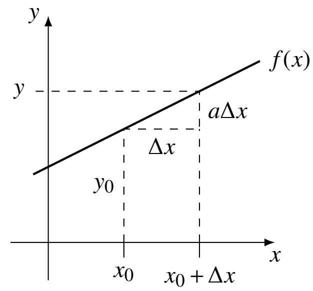
Les notation $f'(x)$ et $\mathrm{TVI}_x(f)$ sont donc interchangeables. Cependant, la notation $f'(x)$ met l'accent sur le fait que la nouvelle fonction f' est déterminée à partir de la fonction originale f. Cette fonction est le plus souvent appelée simplement *la dérivée de f*.

L'opération « ' » (dérivée) est en fait elle même une sorte de fonction, mais qui prend une fonction comme argument et qui retourne une nouvelle fonction :

$$\text{dérivée}: \text{fonctions réelles} \to \text{fonctions réelles}$$

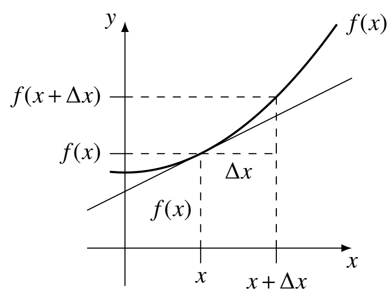
5.3 Droite tangente et approximation d'une fonction

Si une droite est de pente a, une augmentation de Δx de la valeur de x augmentera la valeur de y de $a\Delta x$.



On a donc que $y = y_0 + a\Delta x$.

On peut se servir de cette relation pour obtenir une approximation linéaire à l'aide de l'équation de la droite tangente.



Dans ce dernier graphique, la pente de la tangente au point $\big(x, f(x)\big)$ est, par définition, la valeur $f'(x)$ de la dérivée évaluée en x. En remplacent les paramètres de la relation $y = y_0 + a\Delta x$ par ceux de la droite tangente du dernier graphique, l'équation de la droite tangente en $(x, f(x))$ (où y est fonction de Δx) est

$$y = f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Si on considère que y sur la droite tangente est une bonne approximation de y sur le graphe de la fonction f, on peut faire l'approximation suivante de $f(x+\Delta x)$

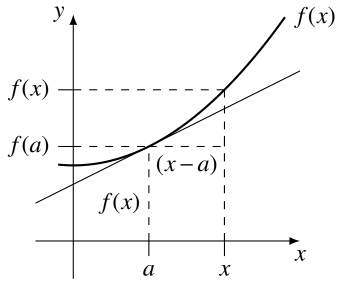
$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

5.3.1 Définition alternative de la dérivée

On peut aussi définir la dérivé de la manière suivante :

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

La comparaison du graphique suivant, qui illustre les principaux éléments de la définition précédente, avec le graphique illustrant la définition originale permet de voir leur équivalence géométrique : dans les deux cas, on détermine la dérivée à l'aide de pente de sécantes approximant la pente de la tangente.



Exemple 5.3. Si $f(x) = \sqrt{x+1}$, la dérivée $f(a)$ peut être calculée par

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{a+1}}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{a+1}}{x-a} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{a}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{a+1}} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{(x+1)-(a+1)}{x-a} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{a+1}} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{x-a}{x-a} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{a+1}} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{a+1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a+1}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{a+1}}
\end{aligned}$$

En utilisant cette forme de la définition de la dérivée, l'équation de la droite tangente s'écrit plutôt :

$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$

La droit tangente peut servir d'approximation à la fonction pour des valeurs de x proche de a :

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a).$$

Cette approximation sera généralisée en calcul intégral. On appelle cette généralisation *série de Taylor* et on y consacrera près d'un quart de la session !

Notons enfin que l'on peut aussi écrire la définition de la dérivée de la manière suivante, en utilisant x_0 au lieu de a.

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

La notation x_0, x_1, x_2 est souvent utilisée pour désigner des valeurs particulières de x.

5.4 Différentiabilité

Définition 5.3. Une fonction f est **différentiable** en $x = a$ si la limite servant à définir $f'(x)$ existe, c'est à dire quand

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \text{ existe}$$

Exemple 5.4. La fonction valeur absolue $f(x) = |x|$ n'est pas différentiable en $x = 0$.

En effet,

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{|x| - |0|}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} \end{aligned}$$

Cette dernière limite est une limite « $\frac{0}{0}$ ». On ne peut pas directement simplifier $|x|$ et x. Il faut simplifier différemment selon le signe de x. Si x est positif, $|x| = x$ et donc

$$\frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1.$$

Si x est négatif, $|x| = -x$ et donc

$$\frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1.$$

On peut donc compléter le calcul de $f'(0)$ en prenant les limites à droite et à gauche.

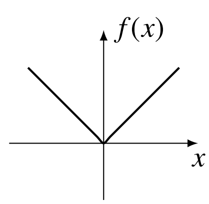
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} -1 = -1$$

Comme les limites à droites et à gauche ne sont pas égales, on a que

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} \nexists.$$

On a donc montré que $f'(0)$ n'existe pas, car la limite présente dans la définition n'existe pas.



Une conséquence importante de la différentiabilité : si une fonction admet une tangente en un point de son graphe, la fonction est continue en ce point.

Théorème 5.1. Si f est différentiable en $x = a$, alors f est continue en $x = a$.

Démonstration. On suppose que f est différentiable en $x = a$ et on cherche à montrer que f est continue en $x = a$, c'est à dire que

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Si f est différentiable en $x = a$, par définition, il existe une valeur L telle que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = L.$$

Si on considère la limite

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a),$$

en utilisant la propriété donnant la limite d'un produit, on doit avoir que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \lim_{x\to a}(x-a)\\ &= L(0)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Si on simplifie le facteur $x-a$ dans la limite, on a que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) = \lim_{x\to a} f(x)-f(a),$$

et avec le résultat précédent, on a donc que

$$\lim_{x\to a} f(x)-f(a) = 0.$$

$$\lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} f(a) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right) - f(a),$$

et donc

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a),$$

c'est à dire que f est continue en $x = a$. □

La contraposée du dernier théorème sera utile pour l'analyse de fonctions.

Corollaire 5.1. Si une fonction n'est pas continue en $x = a$, alors elle n'est pas différentiable en $x = a$.

Comme une fonction qui n'est pas définie en un point de peut être continue en ce point, une fonction n'est jamais différentiable hors de son domaine.

5.4.1 Types de non-différentiabilité

Comme la différentiabilité n'est rien d'autre que l'existence d'une limite et qu'il y a différent scénarios où une limite n'existe pas, il y a aussi différents scénarios où une fonction n'est pas dérivable (en un point).

Discontinuités

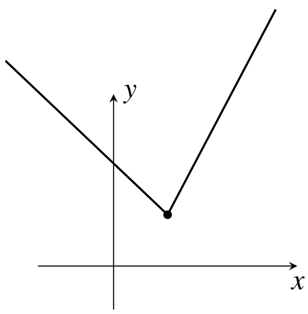
Par le corollaire 5.1, si une fonction n'est pas continue en $x = a$, il n'y automatiquement pas de tangente définie en $x = a$.

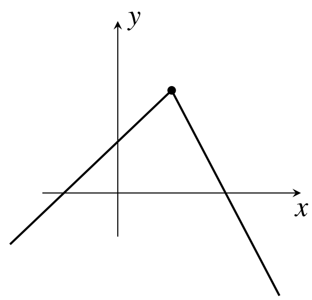
Points anguleux

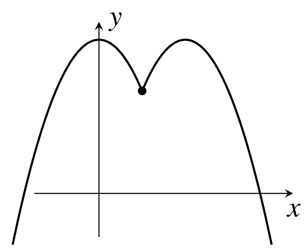
Un **point anguleux** est un point où

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} \neq \lim_{x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

mais où les limites à droite et à gauche existent toutes deux. Dans une telle situation, il y a « deux tangentes », une à droite et une à gauche. Voici quelques exemples de points anguleux.





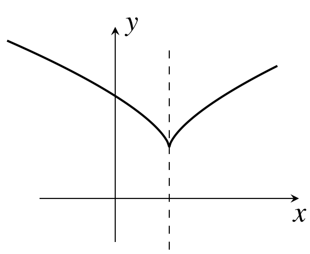


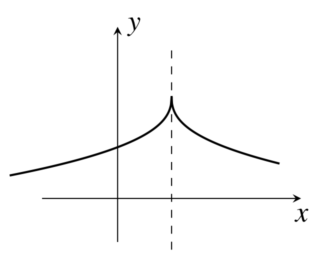
Points de rebroussement

Un **point de rebroussement** est un point où

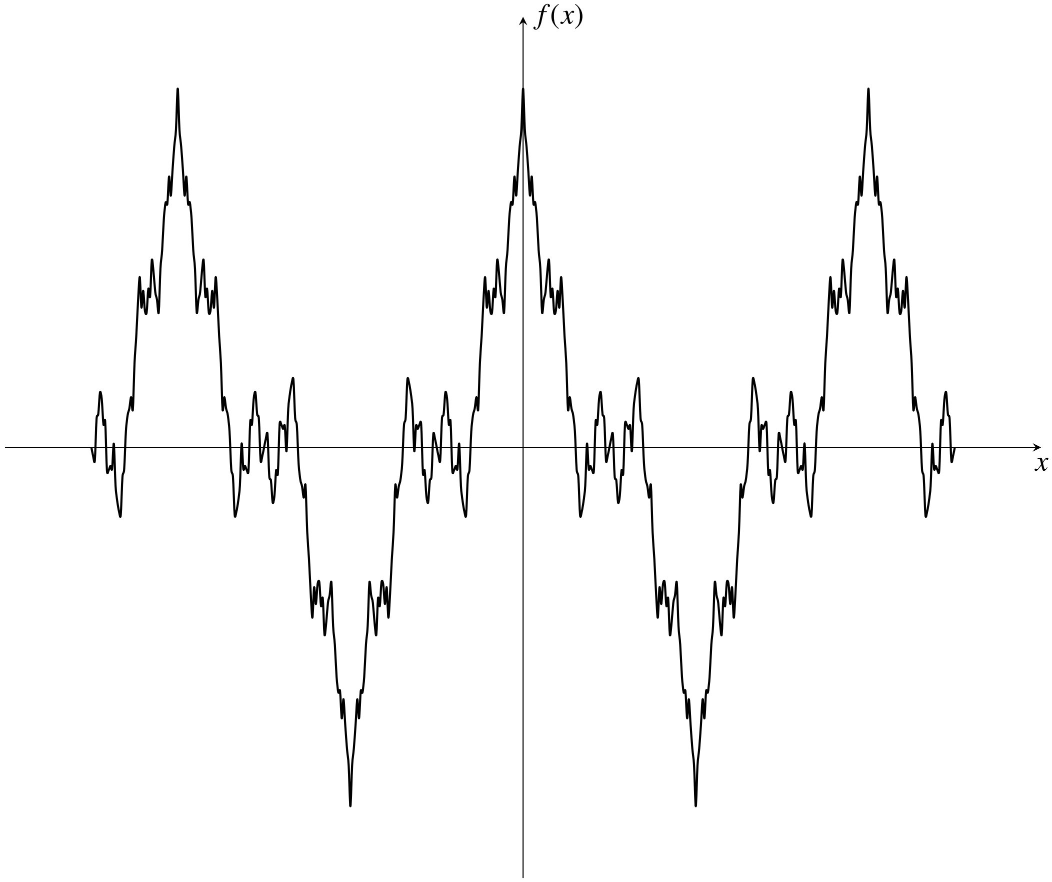
$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \pm\infty \text{ ou } \lim_{x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \pm\infty,$$

c'est-à-dire où la limite à droit ou la limite à gauche est infinie. Cela donc graphiquement un point où il y a une tangente verticale « de pente infinie ».





Enfin, un point de non-dérivabilité peut être du au fait que la limite $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ n'existe pas à cause d'oscillations qui ne se stabilisent pas. Un exemple connnu est la fonction de Weirestrass, qui a la propriété d'être dérivable en aucune valeur de son domaine !



$f(x)$
x